Uma distinção entre problemas aritméticos e algébricos

A distinction between arithmetic and algebra problems

Pedro Franco de Sá
Universidade do Estado do Pará | Universidade da Amazônia
John Andrew Fossa
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Resumo

Apesar do volume considerável de pesquisas sobre resolução problemas, falta, na literatura, uma resposta que apresente uma maneira consistente de distinguir os problemas aritméticos dos problemas algébricos. Nesse sentido, objetivamos apresentar uma proposta de distinção entre os problemas aritméticos e os problemas algébricos, com base nas propriedades de igualdade. Além disso, buscamos analisar algumas conseqüências imediatas dessa proposta. Os resultados obtidos indicam que muitos problemas envolvendo operações com números naturais, fracionários e porcentagem que, normalmente, são aceitos como problemas aritméticos, na realidade, são algébricos. Essa interpretação errônea, quando levada para a Matemática escolar, muitas vezes, causa aos discentes dificuldades para resolver problemas.

Palavras-chave: Problemas algébricos. Problemas aritméticos. Ensino de matemática.

Abstract

Although there has been a considerable amount of research done on mathematics problems, the literature does not identify those factors that characterize arithmetic problems and distinguish them from algebra problems. The purpose of the present paper is to propose such a distinction, based on the properties of equality. Some immediate consequences of the proposal will also be analyzed. Our results indicate that many problems involving operations with the natural numbers, fractions and percent that are generally considered as arithmetic problems are in reality algebra problems. The misinterpretation of these problems frequently entails educational difficulties for students of elementary arithmetic.

Keywords: Algebra problems. Arithmetic problems. Teaching of mathematics.

Introdução

A pesquisa sobre os problemas verbais contém um volume considerável de trabalhos que procura determinar os fatores que tornam um problema mais ou menos difícil para os discentes de diferentes níveis de escolaridade e outros que visam entender as relações entre a aritmética e a álgebra, bem como a sua respectiva transição. Entre esses, podemos citar, a título de exemplo, Filloy e Rojano (1989) e Linchevski e Herscovics (1996). A importância e o estado inconclusivo desses estudos são destacados por Lins e Gimenez (1997, p. 113) da seguinte maneira: "O que precisamos fazer é entender de que modo álgebra e aritmética se ligam, o que elas têm de comum. Feito isso, teremos encontrado uma verdadeira raiz, o que nos permitirá repensar a educação aritmética e algébrica de forma única." No presente trabalho, apresentaremos uma distinção entre os problemas aritméticos e algébricos que se baseia no uso de propriedades da igualdade.

Respostas anteriores

Antes de apresentar a nossa proposta, será interessante ver como problemas aritméticos e algébricos são concebidos tanto por autores de livros textos, quanto por pesquisadores da área de Educação Matemática. Para tanto, escolhemos um exemplo típico de cada uma das referidas categorias.

Na primeira categoria, apresentamos a conceituação feita na obra *Elementos de Arithmética*, um curso primário editado por F.T.D. Nela encontramos: "[...] nos problemas de aritmética, ordinariamente procuram-se certos números desconhecidos, por meio de outros conhecidos." (ELEMENTOS, p. 14). Apesar da afirmação feita ser verdadeira, ela não serve para distinguir os problemas aritméticos dos algébricos, devido ao fato de que nos problemas ditos algébricos, também operamos com quantidades conhecidas para determinar uma quantidade desconhecida. Portanto, acreditamos que a descrição apresentada para os problemas aritméticos não é satisfatória.

Na segunda categoria, encontramos a seguinte caracterização de Puig e Cerdan (1988, p. 19): "[...] um problema será um problema aritmético sempre que os conceitos, conhecimentos ou recursos não estritamente aritméticos dos contextos que aparecem no enunciado não sejam decisivos na hora de resolver o problema." A nosso ver, essa caracterização dos problemas aritméticos também não é satisfatória, pois não apresenta critério(s) que permita(m) decidir de maneira operacional se um dado problema é ou não aritmético. Ainda mais, na falta de uma caracterização do que sejam conhecimentos e recursos aritméticos, tem uma circularidade na sua apresentação.

Visto que nossa proposta envolverá, de forma contundente, o conceito de igualdade, voltaremos a nossa atenção a seguir sobre alguns estudos importantes acerca do mencionado tema.

Estudos sobre a igualdade

No trabalho de Behr, Erlwanger e Nichols (1980), encontramos os resultados de um estudo feito com crianças de idade entre 6 e 12 anos, visando responder às seguintes perguntas:

Necessariamente, sentenças aditivas válidas escritas em formas diferentes são tidas como verdadeiras pelas crianças?

- As sentenças do tipo $2 + 4 = \square$ e $\square = 2 + 4$ são vistas como tendo o mesmo significado pelas crianças?
- Como as crianças vêem sentenças tais como $3 = 3$ e $3 = 5$?
- Como as crianças entendem sentenças tais como $2 + 3 = 3 + 2$?

As informações foram obtidas por meio de entrevista não estruturada e individual com as crianças.

Com relação às sentenças da forma $a + b = \square$, os resultados foram os seguintes:

- as crianças foram capazes de ler os símbolos e entender que eles indicam para ser efetuada uma adição;
- as respostas de perguntas sobre o significado do símbolo = indicam que a maioria das crianças de 6 anos tem o entendimento sobre esse símbolo;
- os questionamentos sobre as parcelas da adição mostraram que as crianças entendem o que elas significam;

- as crianças de 6 e 7 anos aceitam que expressões como 2 + 3 sejam significativas, mas sugerem que alguma operação tem que ser realizada;
- as crianças de 6 e 7 anos, geralmente, não pensam 2 + 4 como sendo uma forma de representar o 6;
- a maioria das crianças é hábil em julgar a verdade ou a falsidade de sentenças como 2 + 3 = 5 e 2 + 3 = 7;
- as crianças percebem, de maneira igual, sentenças do tipo a + b = □ como sendo um estímulo para colocar uma resposta no marcador de posição (), ou seja, as sentenças do tipo a + b = □ são vistas como uma pergunta sobre de quanto vale a + b;
- geralmente, na ausência do símbolo = e do marcador de posição, para as crianças, expressões como 2 + 4 servem como estímulo para fazer alguma coisa.

Com relação às sentenças da forma □ = a + b, os resultados foram os seguintes:

- as crianças de 6 e 7 anos, geralmente, resistem a sentenças escritas na forma □ = a + b, dizendo que está escrito de trás para frente;
- geralmente, as crianças reagem a sentenças escritas da forma □ = a + b e fazem a substituição por sentenças da forma a + b = □ ou □ + a = b;
- quando as expressões da forma □ = a + b são apresentadas oralmente, há tipos diferentes de reações: uma que aceita a expressão oralmente, mas não aceita por escrito; outra que aceita a expressão oralmente e por escrito; e outra que entende □ = a como sendo □ + a.

Quanto às sentenças do tipo a = a e a = b, as conclusões foram as seguintes:

- as crianças de 6 e 7 anos transformaram as expressões do tipo a = a e a = b em sentenças de adição ou subtração;
- às crianças com 6 e 7 anos, quando são apresentadas as expressões do tipo 3 = 5, reagem modificando-as para 3 + 5 = 8 ou 3 – 5 = 0;
- quando as crianças de 6 e 7 anos são apresentadas às expressões do tipo 3 = 3, elas as modificam para 0 + 3 = 3, 3 + 3 = 6 ou 3 –3 = 0;
- as crianças de 8 anos, quando enfrentaram expressões do tipo 3 = 3, associaram com o "fim" de uma adição ou subtração e modificaram para 3 + 0 = 3;
- as crianças de 12 anos, quando perguntadas sobre o significado de expressões do tipo 3 = 3, associaram com expressões do tipo 7 – 4 = 3.

Quanto às expressões envolvendo a igualdade e dois sinais de adição, as conclusões foram as seguintes:

- as crianças não vêem as sentenças do tipo 2 +3 = 3 +2 como representando sentenças sobre relações numéricas;
- as crianças não vêem as sentenças envolvendo a igualdade e adições nos dois membros como indicação de igualdade entre dois conjuntos de quantidades;
- há indícios de que as crianças vêem as sentenças envolvendo a igualdade e adições nos dois membros como indicação "de algo para fazer";
- para a maioria das crianças, a presença de um sinal de adição juntamente com dois numerais sugere que um outro número deve ser encontrado;
- para a maioria das crianças de 6 anos, uma expressão do tipo 2 +3 = 3 +2 não está correta e quando escreve o que lhe parece mais correto substitui a expressão por 2 +3 =5 e 3 + 2 = 5;

- há casos em que crianças de 6 anos aceitam que a expressão 2 +3 = 3 +2 como sendo o mesmo número, devido às parcelas serem as mesmas colocadas em ordem diferente, mas não aceitam que o mesmo seja válido para a expressão 4 + 1 = 2 + 3.

Nas conclusões finais do trabalho de Behr, Erlwanger e Nichols (1980), são encontradas as seguintes afirmações:

- Existe uma forte tendência entre as crianças de aceitar o sinal da igualdade adequado numa sentença, quando o mesmo é precedido de um ou mais sinais de operações;
- As crianças não consideram o símbolo da igualdade como uma relação de comparação entre os dois membros de uma sentença, mas como um operador, isto é, como indicador de que é para se fazer alguma coisa;
- Há indícios de que as crianças não mudam sua forma de pensar a igualdade com o aumento da idade.

Em Kieran (1981), um outro estudo sobre a igualdade, encontramos os resultados de uma revisão bibliográfica sobre os significados de igualdade para estudantes da pré-escola, escola elementar e escola secundária (o nosso Ensino Fundamental e Médio). A referida revisão aponta para o fato de que os estudantes iniciam seus estudos vendo o sinal de igualdade como um operador, como proposto por Behr, Erlwanger e Nichols (1980). Mais tarde, no entanto, expandem sua visão sobre o mesmo e passam a vê-lo como um símbolo que representa uma relação entre valores que ocorrem na expressão.

A conclusão de Kieran (1981) é confirmada, empiricamente, por meio do trabalho de Sáenz-Ludlow e Walgamuth (1998).

Estudos sobre a dificuldade de resolver problemas aditivos

Problemas envolvendo adição e subtração são chamados problemas aditivos. Para facilitar a exposição, limitaremos a nossa discussão a esse tipo de problema. Poderemos, também, aproveitar da uma categorização do referido tipo de problema proposta por Nesher, Greeno, e Riley (1982). Isso consiste nas seguintes três categorias básicas de problemas:

- **Combinação**: aqueles que envolvem relações estáticas entre quantidades, perguntando sobre o total ou sobre uma das parcelas.
- **Transformação**: aqueles que descrevem o crescimento ou decrescimento de um estado inicial, resultando num estado final.
- **Comparação**: aqueles que envolvem relações estáticas de comparação entre quantidades.

Segundo os autores, cada uma das categorias descritas pode ser subdividida. As possibilidades de subdivisão são apresentadas no Quadro 1.

Quadro 1: Tipos de problemas aditivos

Tipo de problema	Descrição geral	Exemplo
Combinação 1	Pergunta sobre o total.	Paulo tem 3 bolas. Antônio tem 5 bolas. Quantas bolas eles têm juntos?
Combinação 2	Pergunta sobre uma das partes.	Pedro e Marcus têm juntos 8 bolas. Pedro tem 3 bolas. Quantas bolas tem Marcus?
Transformação1	Refere-se a crescimento e pergunta sobre o resultado final.	Anderson tinha 3 bolas. Em seguida, Sérgio lhe deu 5 bolas. Quantas bolas Anderson tem agora?
Transformação 2	Refere-se a decrescimento e pergunta sobre o resultado final.	Rafael tinha 8 bolas. Depois deu 5 bolas a Leandro. Quantas bolas Rafael tem agora?
Transformação 3	Refere-se a crescimento e pergunta sobre o valor do crescimento.	Luís tinha 3 bolas. Mere lhe deu algumas bolas. Agora Luís tem 8 bolas. Quantas bolas Mere deu para Luís?
Transformação 4	Refere-se a decrescimento e pergunta sobre o valor do decrescimento.	Suelen tinha 8 brincos. Deu alguns para Isabel. Agora Suelen tem 3 brincos. Quantos brincos ela deu a Isabel?
Transformação 5	Refere-se a crescimento e pergunta sobre o estado inicial.	Lourival tinha algumas bolas. Talita lhe deu 5 bolas. Agora ele tem 8 bolas. Quantas bolas Talita deu a Lourival?

Quadro 1: Tipos de problemas aditivos

Tipo de problema	Descrição geral	Exemplo
Transformação 6	Refere-se a decrescimento e pergunta sobre o estado inicial.	Lourdes tinha alguns brincos. Deu 5 para Moêma. Agora Lourdes tem 3 brincos. Quantos brincos Lourdes tinha?
Comparação 1	Menciona o maior e o menor e pergunta quanto o maior tem a mais que o menor.	Renan tem 8 bolas. Bianca tem 5 bolas. Quantas bolas Renan tem a mais que Bianca?
Comparação 2	Menciona o maior e o menor e pergunta quanto o menor tem a menos que o maior.	Mere tem 8 brincos. Mara tem 5 brincos. Quantos brincos Mara tem a menos que Mere?
Comparação 3	Menciona o maior e pergunta sobre o comparado.	Claudiany tem 8 brincos. Jorilma tem 5 brincos a menos que Claudiany. Quantos brincos tem Jorilma?
Comparação 4	Menciona o menor e pergunta sobre o comparado.	Leilani tem 3 bonecas. Ursula tem 5 bonecas a mais que Leilani. Quantas bonecas Ursula tem a mais que Leilani?
Comparação 5	Menciona o maior e pergunta sobre o referente.	Iran tem 8 bolas. Tem 5 bolas a mais que Carlos. Quantas bolas tem Carlos?
Comparação 6	Menciona o menor e pergunta sobre o referente.	Tarsos tem 3 bolas. Ele tem 5 bolas a menos que Pedro. Quantas bolas Pedro tem?

Nesher, Greeno e Riley (1982) concluíram que os problemas do tipo combinação, mudança e comparação apresentam graus de dificuldade diferentes dentro de cada grupo e entre eles, da seguinte maneira:

- Dos problemas do tipo *combinação*, os que perguntam e sobre o total são mais fáceis em relação aos que perguntam sobre uma das partes;
- Dos problemas do tipo *transformação*, os em que é desconhecida a quantidade inicial e conhecidos o resultado e a mudança são mais difíceis que os demais do mesmo grupo;

- Dos problemas do tipo *comparação*, os em que o referente é desconhecido são mais difíceis que os demais do mesmo grupo.

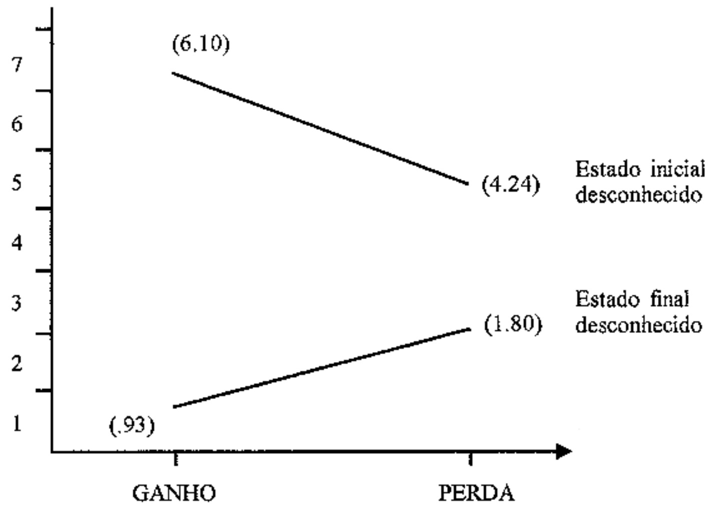
Esses resultados concordam com os encontrados em Hiebert (1982), uma investigação sobre a influência da posição da incógnita em sentenças abertas envolvendo adição. Sua conclusão foi que a posição da incógnita tem significativa influência na dificuldade dos problemas.

Rosenthal e Resnick (1974 apud FAYOL, 1996) descrevem uma pesquisa sobre problemas aditivos, do tipo transformação, envolvendo crianças da segunda série, atual 3º ano do Ensino Fundamental, cujo objetivo foi estudar o desempenho dos alunos nas questões em que a pergunta era ora sobre o estado inicial, ora sobre o estado final. Nesse trabalho, também foram incluídas duas outras variáveis: a ordem de sucessão cronológica dos fatos apresentados e a ação denotada pelo verbo. Os problemas foram classificados em **apresentação congruente**, quando é respeitada a ordem cronológica na apresentação dos fatos, e em **apresentação não-congruente**, quando a ordem cronológica de apresentação dos fatos não é respeitada. Os resultados obtidos permitiram as seguintes conclusões:

- Os problemas de estado inicial desconhecido são mais difíceis que os outros, tendo maior margem de erro e exigindo duração de resolução significativamente mais elevada.
- Os problemas de apresentação congruente provocam menos erros que os de apresentação não-congruente.
- Nos problemas que envolvem o verbo perder, a dificuldade é maior quando a questão é determinar o estado final. Já quando envolve o verbo ganhar, a dificuldade maior é quando a questão é determinar o estado inicial.

Esses resultados podem ser mais bem observados quando analisamos os Gráficos 1 e 2, de Rosenthal e Resnick (1974), citados por Fayol (1996), os quais reproduzimos a seguir:

Gráfico 1: Número médio de erro em função do tipo de problema e da ação expressa pelo verbo

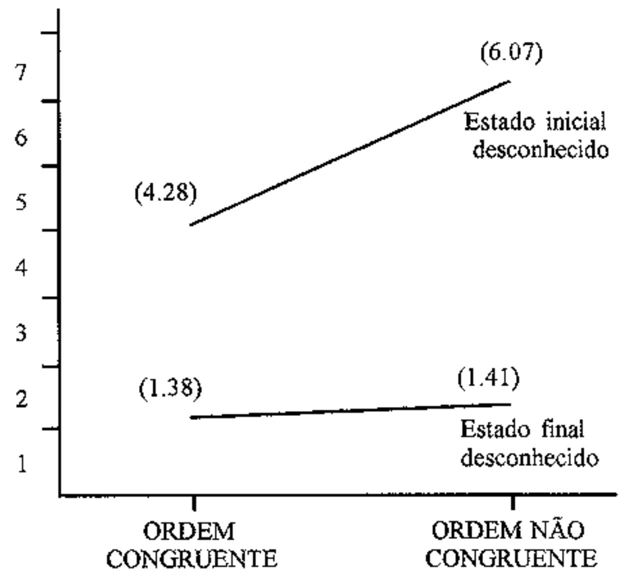


No Gráfico 1, os valores representam o número médio de erros em função do tipo de problema (estado inicial ou final desconhecido) e da ação expressa pelo verbo (ganho *versus* perda).

A leitura do Gráfico 1 permite concluir que:

- nas questões em que o verbo é ganhar, as que apresentam o maior número médio de erros são aquelas em que o estado inicial é desconhecido;
- nas questões em que o verbo é perder, as que apresentam o maior número médio de erros são aquelas em que o estado inicial é desconhecido.

Gráfico 2: Número médio de erro em função do tipo de problema e da ordem de apresentação dos fatos



No Gráfico 2, os valores representam o número médio de erros em função do tipo de problema (estado inicial ou final desconhecido) e da ordem de apresentação dos fatos (congruentes ou não com a ordem cronológica de chegada).

A leitura do Gráfico 2 permite concluir que:

- nas questões em que a ordem da apresentação dos fatos é congruente, as que apresentam o maior número médio de erros são aquelas em que o estado inicial é desconhecido;
- nas questões em que a ordem da apresentação dos fatos não é congruente, as que apresentam o maior número médio de erros são aquelas em que o estado inicial é desconhecido.

Esta primeira pesquisa mostra, portanto, que modificações fundamentais sobre a formulação lexical e/ou retórica dos enunciados ocasionam diferenças significativas e relativamente complexas no nível dos desempenhos Fayol (1996).

Em pesquisas sobre os problemas do tipo Transformação, com duas transformações aditivas, realizadas por Fayol e Abdi e Fayol, Abdi e Gombert, segundo Fayol (1996), os pesquisadores estudaram os efeitos da posição da incógnita na sentença, da ordem de apresentação das informações e da localização da questão. Os problemas analisados foram assim identificados:

1. Posição da incógnita:
   - S1: a + b = ?
   - S2: ? + b = c
2. Ordem de apresentação das informações:
   - O1: informações em primeiro lugar;
   - O2: informações em segundo lugar.
3. Localização da questão:
   - Q1: questão no final do enunciado;
   - Q2: questão no início do enunciado.

No Quadro 2 a seguir, constante de Fayol (1996, p. 146) temos exemplos das possíveis combinações dos itens acima descritos.

Essa pesquisa foi realizada envolvendo estudantes dos 1º, 3º e 5º anos do sistema francês de ensino, correspondentes aos mesmos anos do nosso Ensino Fundamental. A dificuldade numérica foi controlada e os problemas foram apresentados oralmente. As conclusões obtidas, após a análise dos resultados, entre outras, foram as seguintes:

- Os problemas de estado final desconhecido são, em todas as idades, facilmente resolvidos com ajuda de processos pertinentes e homogêneos, o mesmo não acontecendo com os problemas de estado inicial desconhecido.

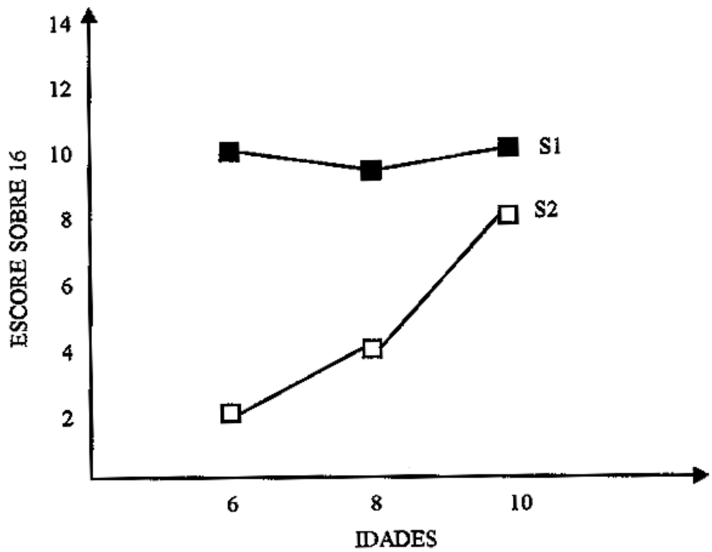
- A questão colocada como cabeçalho produz uma melhora sistemática dos resultados, em todas as idades e em todos os tipos de problemas.

Quadro 2: Combinação de itens × problema

Combinação	Problema
S1O1Q1	Paulo tinha 10 bombons. Sua mãe lhe deu 4 bombons. Sua irmã lhe deu 3 bombons. Com quantos bombons Paulo ficou?
S1O1Q2	Gostaria de saber quantos pratos há no momento sobre a mesa. Havia 2 pratos sobre a mesa. Mamãe colocou 3 pratos. João colocou 2 pratos sobre a mesa.
S1O2Q1	Esta manhã, 5 carros entraram na garagem. Ao meio-dia, 4 carros entraram na garagem. Ontem, já havia 6 carros na garagem. Não tendo saído nenhum carro desde ontem, quantos carros há na garagem?
S1O2Q2	Gostaria de saber quantas folhas Andréa tem na sua pasta agora. Ela colocou 3 folhas rosas e depois 5 folhas verdes. Ela já tinha 6 folhas brancas.
S2O1Q1	Agora, Marcus tem 10 balas. No recreio, ganhou 3 balas. Na saída, comprou 4 balas. Quantas balas ele tinha antes de chegar à escola?
S2O1Q2	Gostaria de saber quantas pessoas havia na corrida antes dos meninos e as meninas chegarem. Agora, tem 10 pessoas; chegaram 3 meninos, depois chegaram 4 meninas.
S2O2Q1	No Natal, a avó de Rafael lhe comprou 2 livros. No Ano Novo, seu pai lhe comprou 4 livros. Agora, Rafael tem 9 livros. Quantos livros Rafael possuía antes do Natal?
S2O2Q2	Gostaria de saber Quantas canetas Talita tinha antes de receber as vermelhas e as verdes. Ela recebeu 4 canetas vermelhas, depois recebeu 3 canetas verdes. Agora, tem 10 canetas.

Esses resultados podem ser mais bem vistos quando se analisa o Gráfico 3, abaixo, que, segundo Fayol (1996), foi apresentado por Fayol e Abdi e Fayol, Abdi e Gombert e refere-se aos resultados da comparação entre o desempenho em relação à idade e à pergunta (se sobre o estado inicial ou sobre o estado final) em 16 questões apresentadas a estudantes.

Gráfico 3: Escore de acerto em relação à idade
e estrutura dos problemas



A leitura do gráfico 3 permite concluir que:

- para as crianças de 6 anos, as questões com estado final desconhecido foram muito mais fáceis que as de estado inicial desconhecido;
- para as crianças de 8 anos, há uma melhora pequena no desempenho com questões envolvendo o estado inicial desconhecido e uma pequena queda do desempenho nas questões envolvendo o estado final desconhecido;
- para as crianças de 10 anos, há uma melhora grande no desempenho com questões envolvendo o estado inicial desconhecido e uma pequena melhora do desempenho nas questões envolvendo o estado final desconhecido;

- para todas as idades analisadas, os problemas com estado inicial desconhecido foram sempre mais difíceis que os de estado final desconhecido.

Proposta de distinção entre problemas aritméticos e problemas algébricos

Após analisarmos os problemas envolvendo as 4 operações com números naturais e fracionários, percebemos que os problemas envolvendo uma operação estão divididos em dois grupos distintos que passaremos a caracterizar agora.

1º Grupo – Os problemas em que a pergunta/incógnita está isolada num dos membros da igualdade após sua modelação (tradução dos dados para linguagem simbólica). Nesses problemas, normalmente, a igualdade é utilizada para indicar o resultado da operação realizada, ou seja, a igualdade é usada para **representar transformações ou resultados**.

Vejamos alguns exemplos:

a) Tinha R\$50,00 e ganhei R\$20,00 num sorteio. Com quanto fiquei? (Nesse problema, a modelação é 50 + 20 = ?).

b) Um vendedor, possuindo 150 metros de fio de telefone, fez uma venda de 80 metros. Quantos metros de fio restaram ao vendedor após a venda? (Nesse caso, a modelação do problema é 150 – 80= ?).

c) Um cinema possui 15 fileiras com 18 cadeiras cada. Não sendo permitido que se assista a filme em pé, qual é o número máximo de pessoas que podem assistir a um filme por sessão nesse cinema? (Nesse caso, a modelação é 15 × 18 = ?).

d) Tenho 1200 bombons para distribuir igualmente em cinco caixas. Quantos bombons devo colocar em cada caixa? (Nesse problema, a modelação é 1200 ÷ 5= ?).

Generalizando, podemos afirmar que, para um problema do 1° grupo, está associada uma das seguintes expressões, abaixo:

- c + b = ?
- c − b = ?
- c × b = ?
- c ÷ b = ?

Nesses problemas, a operação é escolhida diretamente a partir de sua conotação semântica, ou seja, da transformação ocorrida com os dados, que está indicada pelo enunciado do problema.

2º Grupo – Os problemas em que a pergunta/incógnita não está isolada num dois membros da igualdade após sua modelagem. Nesses problemas, a igualdade é utilizada para indicar a relação de equilíbrio exigida entre os dados, ou seja, a igualdade é utilizada para indicar **equilíbrio**.

Vejamos alguns exemplos:

a) Meu pai tinha certa quantia no seu cofre. Depois de guardar a quantia de R$25,00, passou a ter R$78,00. Quanto papai tinha no início? (? + 25 = 78).

b) Fui ao comércio com uma certa quantia. Após gastar R$156,00, verifiquei que ainda me restavam R$95,00. Com quanto cheguei ao comércio? (?–156 = 95).

c) Um comerciante possuía 2000m de arame. Após vender alguns metros, verificou que ainda tinha 1890m de arame. Quantos metros de arame o comerciante vendeu? (2000 – ? = 1890).

d) O triplo de uma certa quantidade é 120. Qual é a quantidade? (3 × ? = 120).

e) Distribuí 28 brinquedos entre algumas crianças. Cada criança recebeu 4 brinquedos. Quantas crianças participaram da distribuição? (28 ÷ ? = 4).

f) Uma certa quantidade de brinquedos foi distribuída igualmente entre 9 crianças. Cada criança recebeu 5 brinquedos. Qual a quantidade de brinquedos que foi distribuída? ($? \div 9 = 5$).

Para um problema do 2º tipo, está associada uma das seguintes expressões, abaixo:

- $? + a = b$
- $? - a = b$
- $a - ? = b$
- $a \times ? = b$
- $a \div ? = b$
- $? \div a = b$

Nesse tipo de problema, ao contrário do que acontece com os de 1º tipo, a escolha da operação é feita com base na propriedade da operação inversa. Estudos como o de Nesher, Greeno, e Riley (1982) mostram que os problemas aditivos do 2º tipo são mais difíceis para os alunos. O motivo dessa dificuldade pode estar no fato de que esses problemas são apresentados, normalmente, após o ensino de cada uma das operações fundamentais e que essas são apresentadas com grande apelo ao seu significado semântico, não destacando as relações entre as operações.

Desse modo, podemos afirmar que, na resolução dos problemas do 1º tipo, as propriedades aditivas e multiplicativas da igualdade não são usadas, enquanto que nos problemas do 2º tipo essas propriedades são utilizadas.

Como o uso da operação inversa, para manter a validade da igualdade, é a essência do método de resolver equações e uma das características da álgebra é a resolução de equações. Propusemos as seguintes definições.

Problema Aritmético é aquele problema que, em sua resolução operacional, não são usadas de maneira implícita ou explicita as propriedades aditivas ou multiplicativas da igualdade.

Exemplo: Um cinema tem 25 fileiras de 18 cadeiras cada. Não sendo permitido assistir a filme em pé, quantas pessoas são necessárias para lotar o cinema três vezes?

Os problemas aritméticos podem ser divididos em: **simples** e **combinados**.

Problema aritmético simples é aquele que só envolve uma operação na sua resolução.

Exemplo: Uma caneta custa R$ 2,00. Quanto custa 7 dessas canetas?

Problema aritmético combinado é aquele que envolve duas ou mais operações ou a repetição de uma mesma operação na sua resolução.

Exemplo: Uma pessoa foi à feira com R$ 50,00. Comprou R$ 5,00 de frutas e R$ 13,00 de verduras. Quanto lhe sobrou do dinheiro?

Problema algébrico é aquele em que, na sua resolução operacional, são usadas de maneira explícita ou implícita as propriedades aditivas ou multiplicativas da igualdade.

Exemplo: Um número somado com seu dobro é 36. Qual é o número?

Os problemas algébricos podem ser dos seguintes tipos: **Imediato simples**, **Imediato combinado** e **Estruturado**.

Problema algébrico imediato simples é aquele em que, na sua resolução operacional, é usada, apenas, uma operação sem o uso explícito de uma variável ou incógnita.

Exemplo: Uma dúzia de canetas custa R$ 36,00. Quanto custa uma dessas canetas?

Problema algébrico imediato combinado é aquele em que, na sua resolução operacional, é efetuada mais de uma operação sem o uso explícito de incógnita ou quando pode ser decomposto em problemas aritméticos simples e problemas algébricos imediatos.

Exemplo: Uma dúzia de canetas custa R$ 36,00. Quanto custa sete dessas canetas.

Esse problema pode ser decomposto nos seguintes dois problemas: 1º)Uma dúzia de canetas custa R$ 36,00. Quanto custa uma dessas canetas? 2º) Uma caneta custa R$ 3,00. Quanto custa sete canetas? Que são, respectivamente, algébrico imediato simples e aritmético simples.

Problema algébrico estruturado é aquele em que, na sua resolução operacional, é necessário o uso de variáveis ou incógnitas, para que fique explícita cada etapa da resolução.

Exemplo: Reparti a quantia de R$ 210,00 entre três pessoas de tal modo que o segundo receba R$ 50,00 a mais que primeiro e que o terceiro receba R$ 80,00 a mais que o segundo.

Dos exemplos apresentados nas definições ora mencionadas, podemos concluir que os problemas com as quatro operações podem ser tanto problemas aritméticos quanto problemas algébricos.

Quanto à modelação dos problemas aritméticos e algébricos, podemos afirmar que:

- a modelação de um problema aritmético sempre resulta numa expressão em que o valor desconhecido fica isolado no segundo membro da igualdade;
- a modelação de um problema algébrico sempre resulta numa expressão em que o valor desconhecido não fica isolado.

Levando essas idéias para ambientes mais gerais como um anel (A; *, #), temos que uma expressão do tipo (a * b) # d com $a, b, d \in A$ corresponde à expressão de uma questão aritmética e $(a * x) \# b = d$ com $a, b, d, x \in A$ e x desconhecido, corresponde a uma expressão de um problema algébrico.

Os problemas envolvendo as operações fundamentais da aritmética podem ser visualizados através do Diagrama 1:

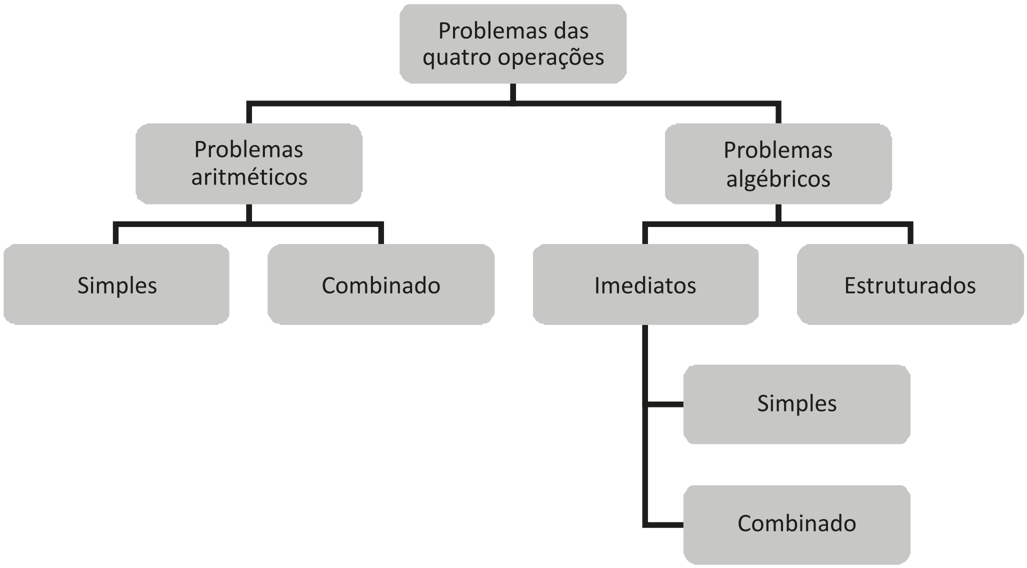


Diagrama 1

Conseqüências da distinção entre problema aritmético e problema algébrico

As definições apresentadas no item anterior geram, por sua vez, algumas conseqüências para o entendimento dos problemas, com implicações diretas no planejamento de atividades por parte do professor que ensina matemática. Entre as conseqüências mais interessantes:

1ª) *É possível explicar a diferença de dificuldade entre os problemas aditivos de mesmo tipo*

Aplicando as definições de problemas aritmético e algébrico aos 14 tipos de problemas aditivos propostos por Nesher, Greeno e Riley (1982), temos o resultado apresentado no quadro abaixo.

Quadro 3: Relação entre os problemas aditivos e os problemas aritméticos e algébricos

Categoria do problema	Partes componentes do problema			Tipo de problema
Combinação	**Parte**	**Parte**	**Todo**	
Combinação 1	Conhecida	Conhecida	Desconhecido	Aritmético
Combinação 2	Conhecida	Desconhecido	Conhecida	Algébrico
Transformação	**Estado inicial**	**Transformação**	**Estado final**	
Transformação 1	Conhecido	Conhecida	Desconhecido	Aritmético
Transformação 2	Conhecido	Conhecida	Desconhecido	Aritmético
Transformação 3	Conhecido	Desconhecida	Conhecido	Algébrico
Transformação 4	Conhecido	Desconhecida	Conhecido	Algébrico
Transformação 5	Desconhecido	Conhecida	Conhecido	Algébrico
Transformação 6	Desconhecido	Conhecida	Conhecido	Algébrico
Comparação	**Referência**	**Comparado**	**Diferença**	
Comparação 1	Conhecido	Conhecido	Desconhecido	Aritmético
Comparação 2	Conhecido	Conhecido	Desconhecido	Aritmético
Comparação 3	Conhecido	Desconhecido	Conhecido	Algébrico
Comparação 4	Conhecido	Desconhecido	Conhecido	Algébrico
Comparação 5	Desconhecido	Conhecido	Conhecido	Algébrico
Comparação 6	Desconhecido	Conhecido	Conhecido	Algébrico

A análise do quadro 3 permite-nos concluir que na categoria dos problemas do tipo:

1. combinação 1, os aritméticos são mais fáceis devido serem aritméticos;

2. combinação 2, são mais difíceis que os do tipo combinação 1 devido serem algébricos ;
3. transformação 1 e 2, são mais fáceis devido serem aritméticos;
4. transformação 3 ,4, 5 e 6 são mais difíceis que os problemas de transformação 1 e 2 devido serem algébricos;
5. comparação 1 e 2, são mais fáceis devido serem aritméticos;
6. comparação 3, 4, 5 e 6 são mais difíceis que os problemas do tipo comparação 1 e 2 devido serem algébricos.

2ª) *Muitos problemas que são apresentados aos alunos das séries iniciais como problemas aritméticos não são aritméticos, e sim problemas algébricos imediatos*.

3ª) *Os problemas envolvendo a operação de subtração de números naturais que são denominados de problemas de completamento e comparação na realidade são problemas algébricos imediatos*, cujas soluções são feitas por meio do cálculo da subtração de dois valores.

4ª) *Muitos dos problemas envolvendo operações com frações que são apresentados aos alunos das séries iniciais como problemas aritméticos não são aritméticos, e sim problemas algébricos imediatos*.

5ª) *Os problemas envolvendo frações podem ser vistos em dois grupos*: *o dos aritméticos e o dos algébrico*, os quais temos:

Os *Aritméticos*: problemas envolvendo operações com frações em que se conhece o todo;

Exemplo: Uma pessoa ganha R$1.200,00 por mês e gasta um terço de seu salário com aluguel, quanto lhe sobra para as demais despesas?

A modelação do problema exemplificado é $1200 - \frac{1}{3} \cdot 1200 = ?$, que é a modelação de um problema aritmético.

Os *Algébricos*: problemas em que se deseja conhecer o todo para solucionar a questão posta.

Exemplo: Uma pessoa gasta R$ 400,00 por mês com aluguel e esse valor corresponde a um terço de seu salário, quanto essa pessoa ganha?

A modelação do problema exemplificado é $\frac{1}{3} \cdot ? = 400$, que é a modelação de um problema algébrico.

6ª) *Os problemas envolvendo o conceito de porcentagem podem ser agrupados em problemas aritméticos e algébricos.*

Os *Aritméticos*: problemas envolvendo porcentagem em que se conhece o todo, a taxa e se deseja conhecer o valor da porcentagem.

Exemplo: Um vendedor ganha 2% de comissão sobre as vendas que realiza. Hoje, ele vendeu um total de R$ 1.500,00. Quanto o vendedor ganhou de comissão hoje?

Esse problema é aritmético, pois sua modelação resulta na seguinte expressão $\frac{2}{100} \cdot 1500 = ?$, que corresponde a um problema aritmético.

Os *Algébricos*: os problemas envolvendo porcentagem em que se conhece a taxa, o valor da porcentagem e se deseja conhecer o todo.

Exemplo: Um vendedor ganha 2% de comissão sobre as vendas que realiza. Hoje, ele recebeu um total de R$ 30,00. Qual foi o total da venda realizada pelo vendedor hoje?

Esse problema é algébrico, pois sua modelação resulta na seguinte expressão $\frac{2}{100} \cdot ? = 30$, correspondente a um problema algébrico.

7ª) *Os problemas de cálculo de razão em duas grandezas são aritméticos*. Pois esse tipo de problema tem sua modelação da forma $\frac{a}{b} \cdot c = ?$ que é uma expressão de um problema aritmético.

8ª) *Os problemas envolvendo proporção são algébricos*. Pois esse tipo tem sua modelação de uma das seguintes expressões:

➔ ?/b = c/d ;

➔ a/? = c/d;

- ➔ a/b= ?/ d ;
- ➔ a/b = c/?;

que são expressões de problemas algébricos.

Considerações finais

O desenvolvimento da habilidade de resolver problemas verbais envolvendo operações com números naturais, números fracionários e porcentagens tem sido uma das tarefas mais difíceis da escola de ensino fundamental.

Como foi visto, por meio da proposta de distinção entre problemas aritméticos e algébricos aqui apresentada, muitos dos problemas que são normalmente considerados como problemas aritméticos são, na realidade, problemas algébricos imediatos. Essa constatação pode deixar a impressão de que é preciso deixar de propor os problemas algébricos envolvendo as operações fundamentais com os números naturais nas séries iniciais da educação básica, o que não é verdade.

O que se faz necessário, por parte dos docentes dos anos iniciais e finais do ensino fundamental, é um maior cuidado no momento de propor problemas envolvendo as referidas operações a fim de evitar que os problemas algébricos sejam apresentados aos discentes, sem que eles já possuam as ferramentas cognitivas necessárias para permitir que a resolução de tais problemas seja possível de maneira mais significativa.

Acreditamos, ainda, que há necessidade de um maior número de estudos acerca de como desenvolver a habilidade de resolver os problemas algébricos imediatos desde os anos iniciais.

Referências

BEHR, M.; ERLWANGER, S; NICHOLS, E. How children view the equals sign. **Mathematics Teaching**, [s.l.], n. 92, p. 13-15, 1980.

ELEMENTOS de aritmética. São Paulo: F.T.D. Sem data.

FAYOL, M. **A criança e o número**. Tradução de Rosana Severino de Leoni. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

FILLOY, E.; ROJANO, T. Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. **For the Learning of Mathematics**, [s.l.], v. 9, n. 2, p. 19-25, 1989.

HIEBERT, J. The position of the unknown set and children's solutions of verbal arithmetic problems. **Journal for Research in Mathematics Education**, [s.l.], v. 13, n. 5, p. 341-349, 1982.

KIERAN, C. concepts associated with the equality symbol. **Educational Studies in Mathematics**, [s.l.], n. 12, p. 317-326, 1981.

LINCHEVSKI. L.; HERSCOVICS, N. Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: operation on the unknown in context of equations. **Educational Studies in Mathematics**, [s.l.], n. 30, p. 39-65, 1996.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

NESHER, P.; GREENO, J.G.; RILEY, M.S. The Development of semantic categories for addition and subtraction. **Educational Studies in Mathematics**. [s.l.], n. 13, p. 373-394, 1982.

PUIG. L.; CERDAN, F. **Problemas aritméticos escolares**. Madrid: Síntesis, 1988.

SÁENZ-LUDLOW, A.; WALGAMUTH, C. Third Graders` Interpretations of Equality and the Equal Symbol. **Educational Studies in Mathematics**, [s.l.], v. 35, p. 153-187, 1998.

Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Universidade do Estado do Pará | UEPA
Universidade da Amazônia | UNAMA
Coordenador do Grupo de Pesquisa
Cognição e Educação Matemática da UEPA
Coordenador do Grupo de Pesquisa em
Ensino de Matemática da UNAMA
E-mail | psa@digi.com.br

Prof. Dr. John Andrew Fossa
Universidade Federal do Rio Grande do Norte | UFRN
Coordenador do Grupo de Pesquisa Matemática e Cultura
E-mail | jfossa@oi.com.br

Recebido 5 out. 2008
Aceito 29 dez. 2008