Somar, subtrair, multiplicar e dividir números inteiros: o método analítico na *Arithmetica Raciocinada* de Pedro d'Alcantara Lisboa, publicada em 1863

Add, subtract, multiply end divide integers: the analytic method in "Arithmetica Raciocinada" of Pedro d'Alcantara Lisboa, published in 1863

Elenice de Souza Lodron Zuin
Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Resumo

A aritmética conquista seu espaço tornando-se um saber escolar nos séculos passados em função da sua aplicação no cotidiano. No Brasil, a partir da segunda metade dos oitocentos, assistimos a uma maior publicação de livros-texto dedicados às escolas primárias e secundárias. Um dos livros publicados nesta época é *Arithmetica Raciocinada para complemento da Instrucção Primária* de Pedro d'Alcantara Lisboa, no qual são apresentadas as quatro operações fundamentais da aritmética com números naturais – adição, subtração, multiplicação e divisão – com a utilização do método analítico, que acompanha os métodos práticos para se efetuar as operações (os algoritmos utilizados, até hoje, nas escolas). Com o desejo de contribuir para uma maior ampliação dos debates no campo da história das disciplinas escolares, temos como objetivo evidenciar uma proposta metodológica que procura privilegiar o raciocínio e o entendimento dos processos apresentados.

Palavras-chave: Operações Aritméticas Fundamentais, Livro Didático, Século XIX.

Abstract

Arithmetic conquers its space becoming a school knowledge in last centuries by daily application. Starting from the middle of the 19th century, we can find more textbook publications dedicated to the primary and secondary schools in Brazil. The book "Arithmetica Raciocinada para complemento da Instrucção Primária", of Pedro d'Alcantara Lisboa, presents the four fundamental operations of arithmetic with natural numbers – addition, subtraction, multiplication and division – using an analytic method, followed by practical methods to execute these operations (the algorithms are until today used in schools). Our objective is to evidence a methodological proposal that tries to privilege the reasoning and the understanding of the presented processes, contributing in the discussions of the history of school disciplines.

Keywords: Fundamental Arithmetical Operations, School Textbook, Nineteenth Century.

Introdução

Somar, subtrair, multiplicar e dividir números inteiros utilizando o ábaco, esta foi a prática utilizada durante muitos séculos. Também era habitual a utilização dos algarismos romanos. Estes faziam parte de uma longa tradição. Correntemente, as contas eram realizadas com o auxílio do ábaco e os resultados registrados, utilizando-se os algarismos romanos. A partir do momento em que começam a ser divulgados os algoritmos para realizar tais operações, o esperado seria que o ábaco fosse deixado de lado, mas isso não aconteceu, pois poucos detinham os conhecimentos para se vincular aos novos procedimentos.

A difusão dos algarismos hindu-arábicos foi muito lentaa. A notação dos algarismos hindus, introduzidos na Europa pelos árabes, é particularmente ajustada à velocidade e certeza do cálculo e permitiu uma operacionalidade que, até então, não havia sido possível atingir. (ALMEIDA, 1997). Leonardo Fibonacci (ca.1180-1256), que aprendera o cálculo hindu na África islâmica escreveu *Liber Abacci* (1202), levando o sistema hindu-arábico para a Europa ocidentalb. Mas, foi o britânico John Halifax (ca. 1022-1256) ou Sacrobosco – como ficou conhecido – que realmente obteve sucesso divulgando o sistema posicional decimal e suas técnicas de cálculo na Europa. Baseando-se na obra de Fibonacci escreveu *Algorismus vulgaris* (1219) – livro deu entrada nas universidades medievais, tornando-se muito difundido.

As operações seriam mais simples com o emprego dos algarismos hindu-arábicos e de novas técnicas de cálculo? No século XV foram redigidas aritméticas práticas na língua vulgar que se tornaram importantes e já se fazia uso do cálculo escrito no século XVI.c Porém, as técnicas não eram nada fáceis e os algoritmos complicados. Na verdade,

> [...] armar uma conta, mesmo uma soma ou uma subtracção, apresentava grandes dificuldades. Se tivéssemos de deitar mão a uma conta de multiplicar o caso era muito mais sério. Dividir era uma operação para peritos e reservada a homens de grande experiência.
> Conta-se de modos muito diferentes, uma história que não podemos verificar documentalmente. [...] Em finais do século XV um importante mercador alemão perguntou ao abacista da cidade qual seria a melhor maneira de instruir o seu filho no mundo difícil do cálculo aritmético. A resposta veio pronta: *Se se trata*

> *de ensinar ao rapaz umas contas de somar ou de diminuir estou certo que ele aprenderá isso consigo. Quanto à multiplicação eu próprio me encarrego disso. No entanto, se estiver a pensar em contas de dividir, então o melhor e o mais seguro é manda-lo para Itália*. (ALMEIDA, 1994, p. 33, grifo do autor).

O cálculo mental, a utilização do ábaco e as técnicas dactilonômicas permaneceram por muito tempo.d As técnicas para realizar as operações elementares tiveram uma lenta difusão.

> A algoritmação escrita é o cerne da revolução da Aritmética do Renascimento. Até então cômputo estava confinado às técnicas digitais e do cálculo mental ou, para os problemas mais complexos, dependia do emprego do ábaco. O aparecimento na Europa do sistema de posição provocou transformações na utensilagem e é assim que se dá a passagem de um código não operatório – o sistema de numeração romana – a um código novo e operacional – o algoritmo – que vai abrir as portas ao cálculo escrito. (ALMEIDA, 1994, p. 34).

Outra grande dificuldade era a falta de uma notação simbólica. Na Idade Média, os termos *plus* e *minus* representavam os sinais (**+**) e (**−**), respectivamente. Tem-se notícia que os sinais aritméticos (**+**) e (**−**) aparecem em manuscritos na Alemanha dos finais do século XV. O sinal para multiplicação (×) foi introduzido por William Outghtred em 1637, enquanto a notação para a divisão (**:**) foi empregada por J. H. Rahn em 1659, sendo utilizada pelos ingleses. (ALMEIDA, 1994).

Quando acontece a escolarização da aritmética? Principalmente a partir do século XVIII. Suas origens estão ligadas à aritmética da cultura mercantil. Na França, em 1714, o Parlamento delibera que tanto a escrita como a aritmética faria parte dos saberes escolares, apesar de não se constituir como "verdadeiros saberes elementares" nas *petites écoles*. (HÉBRARD, 1999, p. 84). Ler, escrever e contar, incluindo as operações fundamentais da aritmética, passaram a ser os requisitos básicos em diversas sociedades.

Aos poucos, a aritmética se estabeleceu como um saber escolar fundamental, se uma tornando uma disciplina autônoma nos currículos. Para Matos (2003, p. 12), "[...] a institucionalização escolar do saber aritmético vai conduzir à sua diferenciação dos outros temas escolares (a leitura e a escrita) e correspondente autonomização." O conhecimento e o domínio das operações aritméticas eram imprescindíveis para o comércio passando a fazer parte da vida cotidiana. Assim, temos um saber que se integra à formação geral.

A partir da segunda metade dos oitocentos no Brasil inicia-se uma maior publicação de livros-texto dedicados às escolas primárias e secundárias. Na área das ciências exatas, os textos franceses e os traduzidos para o português vão cedendo espaço para os de autores brasileiros.

No presente trabalho, evidenciamos um método proposto por Pedro d'Alcantara Lisboa que consta do seu livro *Arithmetica Raciocinada* publicado em 1863. Enfocamos um conteúdo que é pouco explorado e uma metodologia alternativa para o ensino e aprendizagem das operações elementares, os quais não têm sido enfocados pelos historiadores – tanto os historiadores da Educação como os historiadores da Matemática.

Este artigo reflete parte de uma investigação mais ampla dos saberes aritméticos dos oitocentos, na qual o livro-texto comparece como fonte fundamental em nossos estudos porque, através dele, podemos contemplar "[...] um conjunto de normas que definem conhecimentos a ensinar e condutas a inculcar, e um conjunto de *práticas* que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses comportamentos [...]." (JULIA, 2001, p. 10).

As práticas pedagógicas são influenciadas e dirigidas pelo livro didático. Este define conteúdos e impõe formas de transmissão dos saberes, estabelecendo uma seqüência e um ritmo a serem seguidos. Ao analisar o livro didático dentro do seu tempo histórico, com uma determinada destinação (CHOPPIN, 2000) e ao olhar para o ensino da aritmética no século XIX nos voltamos para o campo da história das disciplinas escolares (CHERVEL, 1990), que apresenta ainda poucos estudos referentes à matemática escolar. O teor do texto de Lisboa referente às operações aritméticas fundamentais pode nos apontar indícios sobre as práticas docentes. (CERTEAU, 2003).

Verificamos que o autor, com o objetivo de incentivar o raciocínio dos alunos, apresenta as quatro operações fundamentais da aritmética com números naturaise – adição, subtração, multiplicação e divisão – mostrando um método analítico, que acompanha os métodos práticos para se efetuar as operações (os algoritmos utilizados, até hoje, nas escolas).

O método analítico apresentado consiste em decompor cada número envolvido nas operações de adição, subtração e multiplicação e efetuá-las, permitindo a "visualização" das diversas etapas difíceis de entender no método prático – procedimento que, muitas vezes, o aluno decora sem compreender o processo implícito na execução do algoritmo. Para a divisão, o método consiste em uma equação aritmética.

Temos como objetivo evidenciar uma proposta metodológica que se apresenta em uma época em que a Aritmética atravessava um período de remodelaçõesf e o autor escreve sua "*Arithmetica Raciocinada,*" tentando privilegiar o raciocínio e o entendimento dos processos expostos. A metodologia utilizada por Lisboa, em 1863, é calcada no raciocínio, se mostrando muito adequada para o ensino das operações fundamentais da aritmética porque, através da mesma, é possível analisar e entender a seqüência de etapas em que se constituem os métodos práticos. Essa proposta ia contra a prática comum, na época, de que os alunos decorassem a lição – presente desde Boécio (480-524).

O autor e sua obra

Pedro d'Alcantara Lisboa (1825-1885) era engenheiro e foi aluno da Escola Central das Artes e Manufaturas de Paris. Atuou como professor de matemática na Escola Normal da província do Rio de Janeiro. Entre seus ideais defendia a criação de um museu de Instrução Pública, mas não conseguiu efetivar seu intento. Seu livro, *Arithmetica Raciocinada para complemento da instrucção primária*, foi dedicado ao *Illm. e Exm. Sr Conselheiro Dr Thomaz Gomes dos Santos.*[7]

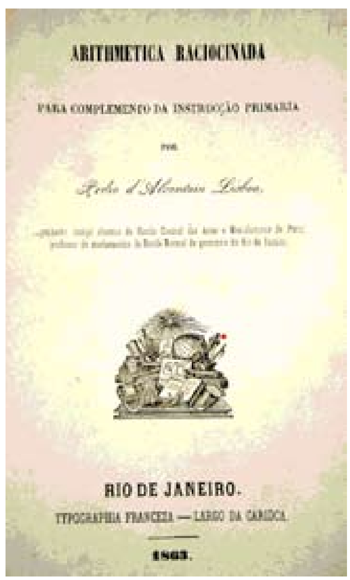
No prefácio, esclarece que a sua obra compreende os preliminares, o sistema de numeração, as noções relativas às equações aritméticas, a teoria das quatro operações fundamentais sobre números inteiros, as frações, as frações decimais e periódicas, alguns princípios dos quais depende a divisibilidade dos números, o máximo comum divisor, e o sistema métrico nacional. Lisboa considera, ainda, que o título escolhido, *Arithmetica Raciocinada*, é bem apropriado, revelando a sua intenção ao escrever o livro.

No prefácio fica evidente que o autor entende que a seqüência dos conteúdos proposta era a mais adequada, conduzindo a um ensino no qual cada assunto é pré-requisito do próximo e nisto também consistiria o ensino através do raciocínio.

O livro, ao que parece, é destinado ao professor. Existem várias notas de rodapé como, no caso das operações, com orientações para os mestres: "[...] Aos Srs. Professores compete repetir exemplos, afim de bem exercitar os alumnos. [...] A explicação verbal deve desenvolver a regra e exercitar os alumnos." (LISBOA, 1863, p. 17 e 18).

O texto, como era comum na época, é dividido em lições, em parágrafos numerados seqüencialmente. Ao final de cada lição, o autor deixa uma série de perguntas – denominada *Interrogatório* – sobre o tema exposto. Além das perguntas teóricas que constam no *Interrogatório*, nenhum outro tipo de exercício ou problema é proposto.

Entendemos que o autor, como professor da Escola Normal da província do Rio de Janeiro, se preocupa em apresentar uma metodologia que facilitasse o entendimento dos algoritmos das operações fundamentais, pois o método prático limita a compreensão dos procedimentos realizados. "*Arithmetica Raciocinada*" não é o único livro escrito por Lisboa. Em um inventário por nós realizado, encontramos também "*Sistema Métrico Nacional*" (1862) e "*Noções de Geometria Elementar.*" (1867).


ARITHMETICA RACIOCINADA

PARA COMPLEMENTO DA INSTRUCÇÃO PRIMARIA

POR

RIO DE JANEIRO.

TYPOGRAPHIA FRANCEZA — LARGO DA CARIOCA

1863.

A primeira lição

O autor inicia com as "Noções preliminares:"

1. Arithmetica é a sciencia dos números.
2. Para poder comprehender esta tão resumida definição, cumpre bem compenetrar-se do que é sciencia e do que é numero.
3. Sciencia em geral é a reunião de principios, de leis, de theorias relativas a uma determinada ordem de factos. Na humanidade os homens são os factos e a reunião dos princípios, das leis, das theorias relativas aos homens constitue a sciencia – Historia. No globo os mares, os rios, as montanhas, as producções, as cidades etc. são os factos, e a reunião dos princípios, das leis, das theorias relativas a estes factos forma a sciencia denominada – Geografia. Na Arithmetica os factos são os numeros. Mas o que é numero?
4. A idéa de números derivou da idéa de unidade. A simples vista, ou o ouvido, ou o tacto, nos desperta n'alma o conhecimento de um objecto, ou de um phenómeno distincto de todos os outros objectos, ou de todos os outros phenómenos, quer sejão estes da mesma espécie, quer sejam de espécie differente. Tem a criança a idéa de individualidade, porque não confunde seu pai, sua mãe, sua ama, com qualquer outra pessoa.
5. Pouco tempo depois que o menino adquire a idéa da individualidade, ganha também elle a idéa de quantidade. Chega a época em que a nascente intelligencia sabe avaliar a maior ou menor quantidade dos objectos que servem para satisfazer suas naturaes necessidades. (LISBOA, 1863, p. 1-2).

Observamos que Lisboa, nestas primeiras noções preliminares, de um total de dezenove, visa esclarecer e atingir o professor. O que é confirmado pelas notas de rodapé dirigidas aos mestres. Nas questões do "Interrogatório" encontramos: "O que é scencia?"; "O que é principio?;" "O que é lei?;" "O que é theoria?;" "O que é quantidade?;" "O que é unidade?" O mesmo formato de perguntas que eram dirigidas aos alunos, mas, neste caso, supomos que são dirigidas ao docente.

Para compreender as operações: o método analítico

Apresentamos a seguir o método analítico proposto por Lisboa para cada uma das operações fundamentais com números inteiros. Explicitamos os casos em que o autor considera que os alunos já saibam efetuar as operações com unidades simples "pela pratica que deve preceder o estudo da Arithmetica." Assim, trabalha exemplos em que os números são compostos de diversas ordens de unidade, sendo estes os casos que envolvem uma maior complexidade para a sua compreensão, através do método prático.

4ª Lição "Noções preliminares de adição"

Lisboa (1863, p. 14)define "[...] calcular é combinar os números entre si, para chegar a um resultado determinado. As quatro operações fundamentaes do calculo são as seguintes: addição – a subtração – a multiplicação – a divisão. Esta lição é destinada a explicar a theoria da adição." "A adição de números inteiros é uma das quatro operações fundamentais da Aritmética, que tem por objecto reunir ou exprimir em um só numero muitos outros. Este único numero se chama somma ou total." (LISBOA, 1863, p. 15).

"Sejão, por exemplo, as parcellas 4000, 395, 1453, 1789. Estas parcellas são collocadas, ficando as unidades de uma mesma ordem em columna vertical do seguinte modo:

$$\begin{array}{r} 4000 \\ 395 \\ 1453 \\ \underline{1789} \end{array}$$

Em seguida, apresenta o método.

4000	= 4000			
395	= 0 +	300 +	90 +	5
1453	= 1000 +	400 +	50 +	3
1789	= 1000 +	700 +	80 +	9
	6000 +	1000 + 400	+ 200 + 20 +	10 + 7
7637				
	7000 + 600 + 30 + 7			

O autor explica o modo de realizar a adição.

Adicionar unidades simples = 10 + 7

Adicionar unidades de 2ª ordem 90 + 50 + 80 = 220 = 22 unidades de 2ª ordem = 200 + 20

Adicionar unidades de 3ª ordem 300 + 400 + 700 = 1400 = 1000 + 400

Adicionar unidades de 4ª ordem.

"Basta aplicar a lei fundamental da numeração escripta, para em um único numero exprimir estes quatro últimos números." (LISBOA, 1863, p. 17).

A seguir, Lisboa apresenta o método prático e, ao final, alerta:

> Este processo que acaba de ser descripto é o processo pratico, geralmente seguido, para addicionar. Melhor porém, se comprehende esta operação fundamental de Arithmetica, confrontando o processo pratico com o que ser póde chamar de analytico, destacando-se umas das outras as unidades de diversas ordens. (LISBOA, 1863, p. 17).

Confirma-se que o autor não prescinde do método prático, mas prima pelo entendimento da operação oferecendo o método analítico para que seja o primeiro a ser apresentado para os alunos.

Ao introduzir o processo prático, recomenda, em nota de rodapé, que "[...] a explicação verbal deve desenvolver a regra e exercitar os alumnos". Entre as perguntas do Interrogatório: "Qual é a regra geral do processo prático da adicção?" "Qual é o processo analytico?" "De que serve este processo?" Confirma-se, com estas questões, que o autor coloca o processo prático ao lado do analítico, inclusive oferecendo a oportunidade ao leitor que reflita sobre os dois métodos, através da resposta às perguntas.

5ª Lição: subtração

Para o autor: "A subtração é uma das quatro operações fundamentaes da Arithmetica, que tem por objecto achar o resto, o excesso ou a diferença entre dous números." Complementa:

> Quando os numeros são iguaes entre si, a differença é zero. Posto de parte este caso em uma subtracção qualquer um dos números é maior que o outro. O maior chama-se minuendo, isto é, o numero que se intenta diminuir, e o menor subtraendo. O resultado da operação, como já foi dito, é o excesso, ou o resto, ou a differença. (LISBOA, 1863, p. 19).

Lisboa ressalta que é necessário saber proceder às subtrações com um só algarismo, ou melhor, "ser conhecida de memoria" antes de iniciar as subtrações com números contendo mais de um algarismo.

Um dos exemplos é determinar a diferença entre 1500 e 1498.

$$\begin{array}{r|lllll} 1500 & = 1000 & + 500 & + .0 & & + 0 \\ -\underline{1498} & = -(1000 & + 400 & & + 90 & + 8) \end{array}$$

O autor destaca que para se realizar esta operação podemos escrever 500 = 400 + 90 + 10, para atender a necessidade da subtração uma vez que é necessário subtrair 90 dezenas de 0 dezenas e 8 unidades de 0 unidades, a princípio.

$$\begin{array}{r|llll} & & 400 & + 90 & + 10 \\ 1500 & = 1000 & + 500 & + 0 & + 0 \\ & = -(1000 & + 400 & + 90 & + 8) \\ -\underline{1498} & 0 & + 0 & + 0 & + 2 \\ 2 & & & & \end{array}$$

Verificamos que embora a conta seja simples podendo ser feita mentalmente, ela se reveste de dificuldades, ao ser realizada por escrito, utilizando-se o processo prático. O método analítico dispõe cada um dos termos, através da decomposição, indicando uma maneira que torna claro o procedimento.

6ª e 7ª Lições: multiplicação

Lisboa chama a atenção dos professores, evidenciando que, nos casos em que a multiplicação envolve dois números menores do que 10, é suficiente ter de memória os produtos da *taboada*. Deste modo, deixa implícita sua posição para que os alunos saibam a *taboada de cor*. Indica que a multiplicação é, na realidade uma soma de parcelas iguais. No entanto, coloca que não é muito conveniente sempre fazer a multiplicação desta forma e assim um método mais rápido se faz necessário. Define a multiplicação como uma operação que

> [...] tem por fim achar um numero derivado de um numero dado, do mesmo modo que outro também dado se deriva de um. [...] Dous numeros dados um se chama multiplicando, o outro multiplicador, e ambos estes são ditos factores. O numero resultante, que se intenta ou procura achar derivado do multiplicando como o multiplicador se deriva de um, é chamado producto. (LISBOA, 1863, p. 23).

Traz um exemplo que envolve números maiores do que a dezena para mostrar o método analítico apresentado a seguir.

$$\begin{array}{c|ll} 33 & = 30 & + 3 \\ \underline{\times\ 14} & = 10 & + 4 \\ & 100 + 20 & + 10 + 2 \\ & 300 + 30 & \end{array}$$

O que o autor propõe é, depois da decomposição de cada numeral, que se proceda primeiramente à multiplicação de 4 por 33, ou seja, segundo a propriedade distributiva da multiplicação em relação à multiplicação, temos:

$$4 \times (30 + 3) = 120 + 12 = 100 + 20 + 10 + 2$$

Em seguida, a multiplicação de 10 por 33, ou seja, aplicando-se novamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à multiplicação, vem:

$$10 \times (30 + 3) = 300 + 30.$$

Finalmente, somam-se as ordens correspondentes e efetua-se a adição do produto obtido.

33	= 30	+ 3	
x 14	= 10	+ 4	
132	100 + 20	+ 10 + 2	
33	300 + 30		
	400 + 50	+ 10 + 2 =	462
462			

O autor reforça a sua proposta de ensinar as operações através do método analítico para uma melhor compreensão dos algoritmos das operações elementares da aritmética. Sobre a multiplicação salienta:

> Bem comprehendido fica este processo pratico comparando-o com o processo analytico, em que destacamos as unidades das diversas ordens. Assim no exemplo tendo a multiplicar 33 por 14, vemos que 33 = 30 + 3 e 14 = 10 + 4.
> Multiplicando todos os termos do multiplicando por 4, e depois os mesmos termos do multiplicando por 10, simplificando, achamos o produto 400 + 60 + 2, o qual pela fundamental da numeração escripta se resume em 462. Na multiplicação, feita pelo processo analytico o produto sempre confere com o producto achado pelo processo pratico; ora, o processo analytico sendo evidentemente baseado sobre a lei fundamental da numeração escripta, o pratico também o é .(LISBOA, 1863, p. 31).

8ª e 9ª Lições: sobre a divisão

Para o autor: "Divisão é uma das quatro operações da Arithmetica, operação que tem por objecto, sendo dado dous numeros, achar um terceiro, que multiplicado pelo segundo dê um producto igual ao primeiro" (LISBOA, 1863, p. 32). "Dos dous termos dados da divisão o primeiro se chama dividendo, o segundo divisor; e o terceiro não dado se chama quociente." E observa que:

> [...] a divisão, no sentido geral, desta palavra, significa a partilha de objectos em partes iguaes ou desiguaes. [...] Do mesmo modo que na multiplicação se obtem o producto addcionando o

> multiplicador tantas vezes quantas são as unidades do multiplicador, assim também na divisão se obtem o quociente, subtrahindo do dividendo o divisor ate que um resto final seja zero ou menor que o divisor. (LISBOA, 1863, p. 33).

Para ilustrar, apresenta a divisão de 25 por 6 da seguinte maneira:

25	
6	
19	1º resto
6	
13	2º resto
6	
7	3º resto
6	
1	4º resto

Explica que, no exemplo dado, é possível verificar que subtraindo sucessivamente 6 de 25, foi necessário fazer quatro subtrações, tendo um resto igual a 1. Deste modo, o quociente é 4 e o resto é 1.

Posteriormente, apresenta o método analítico para dividir 14256 por 4:

Chamando *x* o algarismo dos milhares do quociente,

chamando *y* o algarismo das centenas do dito quociente,

chamando *u* o algarismo das dezenas,

chamando *v* o algarismo das unidades,

Nesse sentido, "[...] é evidente que o quociente pode ser indicado pela expressão ***x****000* + ***y****00* + ***u****0* + ***v***" enquanto não se conhece os algarismos *x*, *y*, *u* e *v* que se procura determinar. Assim explica:

> Ora, *x* deve ser um algarismo, ou 1, ou 2, ou 3, ou 4, ou 5, ou 6 ou 7, ou 8, ou 9. É preciso que o valor de *x* seja tal, que multiplicando-se *x*000 pelo divisor 4, este producto seja o maior producto possível que se possa diminuir do dividendo 14256. Começa-se, pois a experimentar pelo algarismo maior 9. Se *x* é 9, temos *x*000 = 9000. Sendo 9000 x 4 = 36000, número maior do que o dividendo 14256, sabemos que *x* não póde

> ser 9. Não póde também *x* ser 8, porque 8000 x 4 = 32000, producto que é maior que 14256. Experimentando 7, 6, 5, 4, vemos que *x* não póde ser nenhum destes algarismos. Mas *x* póde ser 3. Logo, *x*000 é 3000, e 3000 x 4 = 12000. Subtrahindo 12000 do dividendo 14256, o resto 2256 fica sendo igual aos outros productos parciais. Temos, pois, a seguinte equação arithmetica
> 2256 = (y00 + u0 + v) 4
> Raciocinamos do mesmo modo [Chega-se a conclusão que y = 5, assim y00 = 500]
> 500 x 4 = 2000, diminuindo 2000 de 2256 o resto é 256. Temos pois a nova equação arithmetica
> 56 = (u0 + v) 4
> [observa-se que u = 6, logo u0 é 60] e 60 x 4 = 240. Diminuindo 240 de 256, o resto é 16 = v x 4. Achamos que x = 3, y = 5, u = 6, v = 4, e concluímos que o quociente procurado é 3564. (LISBOA, 1863, p. 34-35).

Uma análise apressada deste método faz crer que ele é muito complexo e que não valeria a pena que ele antecedesse ao processo do algoritmo usual. No entanto, Lisboa cumpre a sua proposta de apresentar uma aritmética raciocinada. É possível perceber, através do método analítico, cada etapa do processo prático da divisão. Inclusive, o autor destaca que apesar de o método analítico para a divisão não ser utilizado no dia-a-dia, se ele for bem entendido auxiliará na compreensão do algoritmo usual para esta operação. E alerta em nota de rodapé "Recomendamos os Srs. professores a repetição deste processo baseado na noção das equações arithmeticas, que cumpre não confundir com as equações algébricas."

Na *9ª Lição* expõe a divisão de 5530 por 395 que segue o mesmo procedimento anterior.

> Chamando *x* o algarismo das dezenas, e *y* o algarismo das unidades simples do quociente, temos que este póde ser escripto provisoriamente pela formula
>
> *x*0 + *y*
> 5530 = (*x*0 + *y*) = 395
> 395 multiplicado por *x*0 deve ser menor que 5530. (LISBOA, 1836, p. 36).

Conclui que $x = 1$, portanto $x0 = 10$ e $395 \times 10 = 3950$, assim, $5530 - 3950 = 1580$.

Logo, $1580 = 395\, y$. Verificando qual valor y pode assumir, chega à conclusão que deve ser igual a 4; $395 \times 4 = 1580$, e $1580 - 1580 = 0$. Assim, tem-se uma divisão exata, porque o resto é zero. Deste modo, 5530 dividido por 395 é igual a 14.

Vimos o *método analytico* proposto para cada uma das operações configurando um modelo lógico e explicativo. O autor, ao utiliza-los, pretende desvelar o processo interno da adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais de modo a tornar mais evidentes e com maior significado os processos práticos ensinados na escola primária.

À guisa de considerações finais

Avaliamos que método analítico proposto no livro "*Arithmetica Raciocinada*" auxilia na compreensão dos algoritmos das operações fundamentais com números naturais, mostrando como se chega ao resultado. O autor privilegia o raciocínio, na medida em que desvela o processo, através de um método simples em que é possível "enxergar" todas as etapas. Lisboa enumera detalhadamente cada passo para a execução dos procedimentos apresentados, de modo a não deixar nenhum tipo de dúvida para o leitor. As seqüências das lições estão bem dispostas apresentando um nível de complexidade crescente dos temas abordados. Introduz os métodos práticos, no entanto, destaca o método analítico, preocupado com a compreensão do processo interno das operações. Avaliamos que o autor prima pelo entendimento dos processos e propõe métodos para serem escolarizados.

O manual escolar faz parte da cultura da escola. Tem uma intencionalidade. É produzido e utilizado com uma intencionalidade. Inferimos que a estratégia de Lisboa se volta para o professor, já que lecionava na Escola Normal, tendo como objetivo que os docentes se apropriassem dos procedimentos didáticos presentes no seu livro-texto, estando, entre eles, o *método analytico* para quatro operações fundamentais da aritmética com números naturais – adição, subtração, multiplicação e divisão. Lisboa se ocupa em sugerir métodos e as respectivas técnicas para o ensino/aprendizagem desses conteúdos específicos. Está implícita na obra a concepção do autor do que é ensinar Aritmética, de uma forma que conduz ao raciocínio. Algo incomum para aquela época, pois era de praxe que os alunos decorassem a lição.

Considerando o levantamento que realizamos entre os livros de Aritmética publicados no Brasil, na segunda metade do século XIX, embora possa existir, não encontramos nenhum que apresente o método analítico. Entre os autores portugueses, encontramos dois: Couceiro da Costa que expõe somente o processo de divisão, inicialmente, através das subtrações sucessivas, como foi colocado por Lisboa, e Manuel da Costa Alemão, que trata da adição e subtração utilizando o método analítico. No entanto, Couceiro da Costa publica o seu *Tratado de Arithmética* em 1866, sendo um texto dedicado aos alunos do Colégio Militar. A Arithmética de Alemão é composta para os liceus e publicada em 1865. Além de ambos serem destinados a um nível mais elevado, são publicadas depois da *Aritmética Raciocinada*, tendo Lisboa também o seu mérito por ser mais claro e detalhado na sua exposição.

Não podemos afirmar que outros autores tenham utilizado o método analítico para todas as operações elementares, fazendo esta exposição de um modo minucioso. Porém, nossas investigações efetuadas, até o presente momento, nos fazem crer que Pedro d'Alcantara Lisboa é pioneiro ao apresentar uma metodologia alternativa para a compreensão das operações fundamentais da aritmética com números naturais naquela época. Assim, o autor pretende promover e veicular saberes pouco divulgados, os quais valoriza, acreditando serem úteis para professores e alunos.

Procuramos uma linha condutora do ensino de aritmética na segunda metade do século XIX, remetendo-nos à história das disciplinas escolares (CHERVEL, 1990), enfocando um saber elementar (HÉBRARD, 1990). Em relação à "Arithmetica Raciocinada" fica claro um "[...] conjunto de normas que definem conhecimentos a ensinar e condutas a inculcar, e um conjunto de *práticas* que permitem a transmissão desses conhecimentos." (JULIA, 2001, p. 10). Existe um direcionamento da prática do professor através das lições, das observações nas notas de rodapé, sendo o método analítico enfatizado.

Em primeiro lugar, o aluno deve entender o processo das operações para depois conhecer os algoritmos. Só após o aluno ter atribuído significado às operações, através do raciocínio, é que a etapa seguinte deve ser apresentada, dando-lhe a conhecer o processo prático. Lisboa, através da sua proposta, deixa explícito seu desejo de modificar o ensino de aritmética, o que interfere diretamente na cultura escolar. (CHOPPIN, 2000).

No livro de Lisboa, a apresentação do método analítico se reveste de importância para a História da Educação, em geral, e para a História da Matemática escolar, em particular, não só por apresentar uma proposta metodológica em meados do século XIX, totalmente inovadora, como por consistir em uma metodologia que se mostra adequada em pleno século XXI. Evidentemente, com exceção do método analítico para divisão, pois este envolve o conceito de equação aritmética que não é trabalhado nas séries iniciais do Ensino Fundamental, todos os outros processos poderiam ser aplicados na escolarização elementar.

É importante observar que a metodologia proposta por Lisboa, apesar de esclarecer os processos práticos das operações elementares, ao que parece, não teve continuidade. Com exceção dos autores Couceiro e Alemão, como citamos anteriormente, não identificamos o método analítico num rol de dezenas de autores de livros de Aritmética do século XIX e início do século XX. Por que? Primeiramente, não sabemos até que ponto outros autores tiveram acesso à metodologia apresentada por Lisboa. Chervel (1990, p. 198) avalia que os novos métodos "[...] dão testemunhos de uma insatisfação, e dos quais o sucesso é também o questionamento, ao menos parcial, da tradição."

Em segundo lugar, mesmo que houvesse conhecimento do método analítico, inferimos que prevaleceu a tradição, que apostava nos exercícios exaustivos, tendo como objetivo a fixação do método prático – que era o convencional – embora muitos estudantes tivessem dificuldades para entender porque procediam daquele modo. Era comum que os alunos decorassem as lições e, até os dias de hoje, vemos professores de matemática brindarem seus discentes com uma lista interminável de exercícios, que são executados de uma mesma maneira. O aluno decora o procedimento por repeti-lo inúmeras vezes. Chegar à resposta correta não significa exatamente que ele aprendeu. Verificamos isso em inúmeras situações em que um estudante não consegue chegar à solução de um outro problema, que envolva o mesmo tipo de procedimento, se for diferente daquele que ele decorou, mas não compreendeu.

Finalmente, queremos ressaltar que, apesar de assistirmos a uma convergência de interesses em torno da escola, de suas práticas, dos saberes pedagógicos do século XIX, no tocante à história da matemática escolar as publicações e investigações são incipientes. De um modo geral, os estudos voltados para a história das disciplinas escolares, para a escolarização dos saberes elementares são realizados ainda por poucos pesquisadores. Em relação à matemática escolar temos alguns trabalhos no Brasil que procuram contribuir para os avanços nesta área, os quais são de Valente (1999, 2004a, 2004b) e Zuin (2001, 2002, 2003, 2004a, 2004b).

Assim como Valente (2004a), defendemos a idéia de que a História da Matemática escolar deve ser vista como uma especialização da História da Educação. Deste modo, pretendemos, com este estudo, contribuir para um melhor entendimento da matemática escolar dos oitocentos e, conseqüentemente, para o avanço das discussões e de outras pesquisas não só na área da Educação Matemática, como também no campo da História da Educação no Brasil.

Notas

[1] Os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 têm sua origem no Vale do Rio Indo, já no inicio da era cristã, embora os símbolos não fossem exatamente esses. O zero só apareceu muito tempo depois. Foram acontecendo modificações na escrita desses algarismos até chegarmos na forma que temos hoje. Os árabes são considerados os responsáveis por sua difusão. É por este motivo que os denominamos algarismos hindu-arábicos. O mundo islâmico conheceu o sistema posicional decimal com suas respectivas técnicas de calculo com Ibn Musa al Khowarizmi. Ele escreveu um livro de aritmética, que se tornou muito importante para a matemática, baseado-se no que aprendera com um livro do século VII, *Siddhanta*, do indiano Brahmagupta.

[2] O *Líber Abacci* utilizava os nove algarismos hindus e o zero, tratava das regras do cálculo escrito seguindo o princípio posicional. Fibonacci, ao colocar o nome do ábaco no "título de sua obra, quisera evitar os ataques daqueles que detinham então o monopólio do domínio aritmético e preconizavam a preferência pelos métodos de cálculo com o *abacus* de fichas." (IFRAH,1997, p. 479).

[3] Entre as aritméticas publicadas no século XV encontramos *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalita* (1494) de Luca Paccioli; bem como tratados de Giorgio Chiarini, em Florença; Pietro Borgi, em Veneza; e na França, em 1520, *Arithmétique nouvellement composée,* de Étienne de la Roche. É importante ressaltar que manuscritos dentro dessa mesma tradição, escritos em francês ou em provençal já circulavam na França desde o século XIV. (HÉBRARD, 1990).

[4] "Resolver questões aritméticas por meio dos dedos tem tradições profundas na matemática árabe da Alta Idade Média. Alguns tratados importantes escritos no século VIII referem-se-lhe. É o caso de Beda (673-735) que no capítulo I da sua obra *De Loquela per gestum digitorum* trata abundante-

mente do caso. Fibonacci, no *Líber abaci* (1202) [...] expõe, com pormenor, como se efectuam estas operações. Ainda no século XVI, numa altura em que o sistema de posição era já aplicado, o matemático espanhol Juan Perez de Moya dedicava um livro inteiro, o oitavo, da sua *Aritmetica practica*, ao estudo deste processo de fazer cálculos." (ALMEIDA, 1994, 115).

O cálculo mental não é mais do que um conjunto de regras, de artifícios e às vezes até de mnemônicas que tendem à obtenção de resultados operatórios. As técnicas do cálculo mental servem para reduzir os elementos operatórios a uma estrutura simplificada em extremos. (ALMEIDA, 1994).

O cálculo mental sobreviveu, a par do cálculo digital, por vezes até imbricado com ele e ocupou – continua a ocupar ainda – lugar de relevo como utensilagem operatória. Os nossos aritméticos quinhentistas divulgaram técnicas notáveis de simplificação, sendo justo destacar Gaspar Nicolas.

Por outro lado os problemas do ábaco e dos abacistas ilustram, à maravilha, as dificuldades que as utensilagens têm em sobreviver quando perdem o comboio do seu tempo, e por esta razão, tendem a morrer. Mas morrem tão devagar, a sua influência leva tanto tempo a desaparecer, que se transformam em factores da resistência. [...] O ábaco devia ter entrado no museu das velharias da cultura européia quando o cálculo passou a ser escrito. Devia, mas só lá entrou muito tempo depois. [...] Porém, ainda hoje, no longínquo Oriente, impõem-se a par dos computadores dos nossos dias. (ALMEIDA, 1994).

[5] Os autores dos livros de aritmética dos séculos passados utilizavam a denominação "números inteiros" no lugar de "números naturais" para evidenciar que não se tratavam de frações.

[6] Com a promulgação da Lei Imperial n. 1157, em 1862, é adotado oficialmente o sistema métrico decimal no Brasil. Torna-se obrigatório o ensino deste novo sistema de pesos e medidas nas escolas a partir da promulgação da Lei. Houve a necessidade da reformulação dos livros de Aritmética, inserindo, além do sistema métrico decimal, outros tópicos que seriam pré-requisitos fundamentais para o entendimento do referido sistema.

[7] O médico Thomaz Gomes dos Santos foi vice-presidente da Província do Rio de Janeiro, defendia que a higiene se constituía no mais importante ramo da medicina no século XIX, de modo a combater as doenças. Atuou como professor de Higiene Pública e Privada e História da Medicina na Faculdade de Medicina durante o período de 1837 a 1864.

O presente artigo foi baseado na comunicação científica *As quatro operações fundamentais na "Arithmetca Raciocinada" de Pedro D'Alcantara Lisboa*, apresentada no III Encontro Nacional de História da Educação, realizado em 2004, Curitiba. Para a publicação nesta Revista, o texto anterior foi revisado e ampliado.

Referências

ALEMÃO, Manuel da Costa. **Arithmetica elementar composta para uso dos alumnos dos lyceus**. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1865.

ALMEIDA, António Augusto Marques de. **Aritmética com descrição do real** (1519-1679). Lisboa: Imprensa Nacional/Casa da Moeda, 1994 (v. 1).

________. **Estudos de história da matemática.** Lisboa: Inquérito, 1997.

BOYER, Carl B. **Historia de la matemática.** Madrid: Alianza Editorial, 1986.

CATÁLOGO da Biblioteca do Museu Escolar Nacional. Rio de Janeiro: Typ. De G. Leuzinger E. Filho, 1885. Disponível em: <http://www.unicamp.br/iel/memoria/Acervo/catalogo-escolar1885.htm>. Acesso: em 25 maio 2004 (Org. por Julio de Lima Franco).

CERTEAU, Michel de. **A invenção do cotidiano.** Artes de fazer. Tradução Ephraim Ferreira Alves. 9. ed. Petrópolis: Vozes, 2003.

CHERVEL, André. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, Porto Alegre, n. 2, p. 177-229, 1990.

Choppin, Alain. Passado y presente de los manuales escolares. In: BERRIO, Julio Ruiz (Ed.) **La cultura escolar de Europa**. Tendências históricas emergentes. Madrid: Biblioteca Neva, 2000 (Memória y critica de la Educacioón).

COSTA, J. M. Couceiro da. **Tratado de arithmetica**. Lisboa: Imprensa Nacional, 1866.

FIBONACCI, Leonardo Pisano. **Liber abbaci**. Roma: Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1857.

HÉBRARD, Jean. A escolarização dos saberes elementares na época moderna. **Teoria & Educação**, Porto Alegre, n. 2, p. 65-109, 1990.

________. **Le leçon et l'exercice**. Quelques réflexions sur l'histoire des pratiques de scolarisation. Paris: INPR/CNRS, 1999 (mimeo). 9 p.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997 (v. 2).

JULIA, Dominique. A cultura escolar como objeto histórico. **Revista Brasileira de História da Educação,** Campinas, n.1, p. 9-43, jan./jun. 2001.

LISBOA, Pedro d'Alcantara. **Systema métrico nacional.** Rio de Janeiro: Typografia de Candido Augusto de Mello, 1862.

________. **Arithmetica raciocinada para complemento da instrucção primária**. Rio de Janeiro: Typ. Franceza, 1863.

________. **Noções de geometria elementar.** Rio de Janeiro: Typografia Perseverança, 1867.

MATOS, José Manuel. Aritmética no Portugal da primeira metade de quinhentos. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2003, Blumenau. **Anais...** Blumenau: FURB/CIAEM, 2003. 1 CD-ROM.

SACROBOSCO, Johannes de. Algorismus. (Microfilm Reprod. de Venetiisper Bernardinum Venetum,1501), 1995.

SCHUBRING, Gert. **Análise histórica de livros de matemática**: notas de aula. Tradução Maria Laura Magalhães Gomes. Campinas: Autores Associados, 2003.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Uma história da Matemática escolar no Brasil** (1730-1930). São Paulo: Anna Blume, 1999.

________. A Matemática na escola: um tema para a História da Educação. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2004, Beja, Portugal. **Trabalho apresentado...** Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciência da Educação, 2004a.

________. **O nascimento da matemática no Ginásio**. São Paulo: Anna Blume/FAPESP, 2004b.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Da régua e do compasso**: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil. 2001. 211 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

________. O ensino de geometria e desenho na reforma do ensino primário de Minas Gerais em 1906. In: CONGRESSO DE PESQUISA E ENSINO EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO EM MINAS GERAIS, 1., 2001, Belo Horizonte. **História da Educação em Minas Gerais.** Belo Horizonte: FCH/FUMEC, 2002. p. 427-439.

________. A valorização do ensino do desenho nas escolas de Minas Gerais nas primeiras décadas do século XX (190-1927). In: CONGRESSO DE PESQUISA E ENSINO EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO EM MINAS GERAIS, 2, 2003., Uberlândia. **Anais...** Uberlândia: EDUFU, 2003. p. 512-523.

________. Por uma nova *Arithmetica*. In: CONGRESSO LUSO-BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO, 4., 2004a, Évora, Portugal. **Trabalho apresentado...** Évora: Universidade de Évora, 2004a.

________. As quatro operações fundamentais na *"Arithmetca Raciocinada"* de Pedro D'Alcantara Lisboa, publicada em 1863. In: ENCONTRO NACIONAL DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO, 3., 2004b, Curitiba. **Anais...** Curitiba: SBHE/PUC-Curitiba, 2004b. 1 CD-ROM.

Elenice de Souza Lodron Zuin
Profa. do Departamento de Matemática e Estatística da
PUC | Minas Gerais
Membro do Grupo de Pesquisa História da Educação Matemática no Brasil
(Coord. Prof. Wagner Rodrigues Valente – PUC SP)
Av. Dom José Gaspar | 500 | Coração Eucarístico
Belo Horizonte | Minas Gerais | 30535-610
E-mail | elenicez@pucminas.br

Recebido 7 jun. 2005
Aceito 5 jul. 2005