RESGATANDO PROCESSOS GEOMÉTRICOS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA UMA DISCUSSÃO SOBRE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Prof. Dr. Francisco Peregrino Rodrigues Neto

RESUMO

O presente trabalho discute sobre álgebra, particularmente sobre equações quadráticas, fazendo uso da História da Matemática como recurso didático para ensinar os próprios conceitos de matemática. Objetivamente o trabalho resgata da História da Matemática alguns processos algébrico-geométricos, como auxílio didático para promover o ensino-aprendizagem dessa matéria através de atividades estruturadas com essa finalidade. O desenvolvimento da parte matemática se inicia com a resolução de casos particulares de equações do 2° grau e se completa com a dedução algébrica da conhecida fórmula de Bhãskara, usando-se recursos geométricos. O trabalho é dirigido para professores de matemática que atuam na 8ª série do I° grau e/ou no ensino médio.

Palavras-Chave

1. Matemática (primeiro grau) - Ensino.
2. História da Matemática - Ensino.
3. Álgebra (equações quadráticas) - Geometria (retângulo) - Ensino.

ABSTRACT

This article discusses the use of some algebraic-geometric processes from the History of Mathematics as a didactic resource to teach quadratic equations through mathematical activities structured with that purpose. My presumed clientel is 8th grade mathematics teachers.

Key words

1. Mathematics Education (8th grade).
2. History of Mathematics.
3. Algebra (quadratic equations).

APRESENTAÇÃO

O presente trabalho é uma reedição modificada, ampliada e revisada de um outro que escrevi em 1991, sob o título: *Completando o quadrado -por geometria- para deduzir a fórmula de Bhãskara.*(Ver Rodrigues Neto (1991)). Trata-se de um texto que aborda aspectos de geometria e álgebra, tirados da História da Matemática, e que podem ser úteis para a relação ensino-aprendizagem de álgebra. Basicamente, o assunto matemático trata de equações quadráticas do ponto de vista do ensino. O texto contém uma discussão mais detalhada a respeito do resgate e uso de processos algébrico-geométricos da História da Matemática. Merece destaque o diagrama grego para produtos notáveis e a aplicação do processo de resolução de equações quadráticas da matemática árabe do séc. IX, que são empregados como auxílio didático no ensino de álgebra. Salienta-se também a importância de alguns conceitos algébricos e geométricos, a exemplo de área do retângulo e dos produtos notáveis, dentre outros, para o desenvolvimento do trabalho, que começa com resolução de casos particulares de equações e vai até o desenvolvimento da forma geral, com uso de geometria. Também é feita uma demonstração só do ponto de vista algébrico da fórmula, generalizada para números reais, que é complementada com uma discussão das possibilidades matemáticas de seu uso, e outros esclarecimentos. O texto é ilustrado por figuras, que servem de interpretação geométrica para as expressões algébricas, tais como fatoração de trinômio quadrado perfeito, fazendo uma ligação entre álgebra e geometria, e é complementado com informações históricas. A forma como é apresentado - com manipulação algébrica simbólica, referências à História da Matemática, figuras geométricas, propriedades matemáticas, *etc.*- é uma necessidade própria desse tipo de trabalho, que tem, também, um objetivo didático.

Por último, o trabalho é dirigido a professores de matemática do I° e/ou II° graus, ou estudantes interessados, como uma possibilidade para o ensino de álgebra.

INTRODUÇÃO

O currículo de matemática para o I° grau, que data de meados do séc. XX, reestruturado sob influência do Movimento da Matemática Moderna, por volta de 1970, compreende os campos de aritmética (que investiga as propriedades elementares dos números inteiros e racionais), álgebra (estuda as leis e os processos formais de operações com entidades abstratas) e geometria (investiga as formas e as dimensões dos seres matemáticos). Os conteúdos de álgebra[1] são organizados nos livros textos para 6ª, 7ª e 8ª séries, em: equações (do 1° grau, 2° grau, biquadradas, irracionais), sistemas de equações, polinômios, produtos notáveis, fatorações, *etc.*, e um estudo sobre funções linear e quadrática. Os produtos notáveis e fatorações, pré-requisitos para o estudo das equações quadráticas, são organizados, respectivamente, nos livros para as 7ª e 8ª séries. Com a matemática moderna, os livros-textos passaram a trazer os conteúdos de álgebra justificados pelas propriedades estruturais dos números (racionais, na 6ª série, com estrutura de corpo) reais. Demonstrações de álgebra, ou geometria, fazem parte dos livros para o nível referido. Por exemplo: Castrucci (1998, p.73), Bongiovanni (1991, p.63), Pierro Netto (1982, p. 33) e Sangiorgi (198?, p. 21) apresentam a dedução algébrica para a fórmula da equação do 2° grau (conhecida como fórmula de Bhãskara), mas praticamente com a mesma abordagem. Os livros da 8ª série apresentam um estudo completo sobre resolução desse tipo de equação, incluindo-se as biquadradas e as irracionais. De acordo com a nova Lei de Diretrizes e Bases 9394/96 (ver Brzezinski, 1997), os ensinos de I° e II° graus passaram a ser denominados, respectivamente, de Ensino Fundamental e Ensino Médio. Os conteúdos de matemática foram mantidos.

Geralmente os livros-textos de matemática apresentam os assuntos partindo da conceituação, dos exemplos e exercícios de treinamento para o aluno, inclusive das matérias sobre álgebra. As equações quadráticas, por exemplo, costumam ser apresentadas nos livros a partir de um estudo sobre resolução das equações incompletas, seguindo-se a apresentação da fórmula geral. Em alguns livros-textos, constam ilustrações de casos de fatoração (fator comum e agrupamento) por áreas planas, a exemplo de Bongiovanni (1991, págs. 52 e 54). Os autores Castrucci, Giovanni, Giovanni Jr. (1998, págs. 67-70) fazem uso de interpretações do produto notável *quadrado da soma de dois termos*, por áreas planas, para ilustrar a resolução de equações completas do 2° grau. Depois de alguns *exemplos* e *exercícios de fixação,* o livro apresenta a *Fórmula resolutiva ou fórmula de Bhãskara*. Tradicionalmente, as abordagens de um conteúdo matemático em sala de aula costumam ser feitas partindo-se da conceituação e de exemplos da matéria. Depois de um treinamento do aluno, com exercícios sobre o assunto, o professor aplica um teste para tentar quantificar o nível de aprendizagem. No ensino tradicional, a metodologia e a reprodução da seqüência didática do livro-texto pelo professor parece que caminham juntas. Nessa atividade de transmissão do conhecimento, muitas vezes os recursos do professor se restringem à fala e à escrita no quadro. O uso de meio de ensino mais atual pelo professor poderia até tornar a aula de matemática mais didática para o aluno, no sentido de assimilação da informação. Mas, os desafios da educação, na relação ensino-aprendizagem, parecem requerer do professor sensibilidade para enfrentar os problemas, cujo caminho passa pela pesquisa.

Com o advento da Matemática Moderna, nos anos 60 e 70, vieram também as preocupações metodológicas com o ensino. Discussões sobre Educação Matemática - ver D'Ambrosio (1998) - fundadas em teorias do conhecimento, como a que coloca o aluno como sujeito da aprendizagem, leia-se ensino construtivo, e, em particular, o ensino organizado por atividades estruturadas para o aluno, se constituem em alternativas metodológicas na direção de um ensino de melhor qualidade. Outras abordagens, tais como Resolução de Problemas - ver Polya (1974) - e o uso da História da Matemática são expedientes válidos para se abordar assuntos de matemática, embora esses procedimentos não se caracterizem como uma metodologia em si. A respeito do último, Fossa (2001) discute sobre a História da Matemática em sala de aula e caracteriza seus vários usos no ensino. Segundo o autor, o *Uso Ornamental*, geralmente versando sobre notas históricas ou biografias de matemáticos, seria o mais comum em sala de aula. Por outro lado, ele faz referência ao *Uso Ponderativo*, que *utiliza a História da Matemática para ensinar os próprios conceitos da matemática*. Assim, a matemática poderia ser resgatada da História para ensinar os próprios conceitos matemáticos, através de atividades de ensino estruturadas para o aluno. Essa abordagem daria oportunidade ao aluno de desenvolver certos conceitos matemáticos através de uma espécie de reconstrução.

O presente trabalho, que está voltado para o ensino-aprendizagem de álgebra elementar, resgata, da História da Matemática, alguns aspectos interessantes da álgebra, mais precisamente sobre equações quadráticas, tendo em vista sua aplicação no ensino de 8ª série do 1° grau. O interesse do trabalho no uso da História da Matemática para o ensino de álgebra reside no resgate de certas elaborações matemáticas que possibilitam uma ligação entre álgebra e geometria, tornando viável um interessante processo algébrico-geométrico que permite ao aluno construir determinados conceitos de álgebra. Essa abordagem se apresenta como uma alternativa didática para o ensino-aprendizagem da resolução de equações do 2° grau. O trabalho se desenvolve a partir do estudo de casos particulares desse tipo de equação e visa, principalmente, complementar a dedução da fórmula para resolução de equações do 2° grau, para obter a fórmula geral. O texto também discute o desenvolvimento da expressão geral, que é apresentada na forma algébrica, generalizando-se uma fórmula simbólica para os números reais.

O presente trabalho é exposto da seguinte maneira:

¦ Uma discussão inicial resgata, da História da Matemática, o diagrama grego para o quadrado da soma de dois termos. Trata-se de uma interpretação por retângulos a respeito do quadrado da soma de dois números positivos. A construção geométrica desse tipo de expressão algébrica é fundamental para este trabalho.

¦ Discute-se a aplicação do processo de resolução de equações quadráticas de al-Khowarizmi, que faz uma categorização por tipos - também resgatado da História da Matemática e que usa o quadro geométrico dos gregos - para justificar a obtenção da solução positiva de uma equação do 2° grau. Nessa oportunidade, a determinação de uma raiz não-positiva é discutida em termos de fatoração (processo justificado por meio de interpretação geométrica).

¦ Na seqüência, os processos algébricos acima mencionados são usados para determinar o termo que completa o quadrado na forma geral da equação do 2° grau e desenvolver a chamada fórmula de Bhãskara.

¦ O trabalho é completado com uma demonstração algébrica da fórmula geral, válida para números reais, partindo da forma canônica das equações quadráticas. Uma justificativa geométrica é feita em paralelo com uma demonstração algébrica, para ilustrar uma análise das possibilidades matemáticas de uso da fórmula. No final, são discutidas algumas sugestões de atividades de ensino para o aluno.

Salienta-se a importância de alguns conceitos matemáticos, dentre outros, para este trabalho, que fazem parte do currículo de matemática para as últimas séries do I° grau. Os conceitos destacados são:

a)área do retângulo;

b)os produtos notáveis (quadrado da soma - ou diferença - de dois termos e o produto da soma pela diferença de dois termos), que são discutidos do ponto de vista geométrico.

c)casos de fatoração (fator comum, agrupamento, trinômio quadrado perfeito e diferença de dois quadrados).

Além desses, merecem destaque os seguintes conceitos: a comutatividade, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (ou, simplesmente, distributividade) e os princípios da igualdade.

A ÁLGEBRA NA ANTIGUIDADE

Há registros de que os babilônios, na antiguidade (1.700 a.C.), já manipulavam operações algébricas e resolviam equações completas do 2° grau, pois já dominavam algumas formas de fatoração. Séculos mais tarde, a matemática grega, que sofreu modificações consideráveis à época de Platão (séc. IV a.C.), deu um novo tratamento à álgebra babilônia herdada pelos pitagóricos. A álgebra aritmética antiga cedeu lugar a uma álgebra geométrica segundo a qual os problemas envolvendo, por exemplo, equações lineares ou quadráticas passaram a ser interpretados. Assim, os gregos desenvolveram a própria álgebra dentro da geometria. (Essa também teria sido uma maneira que os gregos encontraram para evitar o uso de razões, devido ao problema da incomensurabilidade. Ver Boyer (1974)).

No século IX o matemático muçulmano al-Khowarizmi usou a álgebra geométrica grega para justificar processos algébricos, em sua mais importante obra, *considerada a que inaugura a álgebra: Al-Kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wál-muqabala (Pequena obra sobre o cálculo da redução e da confrontação)*. Ver D'Ambrosio (1994, p. 46). Mais tarde, no séc. XII, um algebrista hindu chamado Bhãskara, que sabia resolver equações quadráticas completando quadrados, seria autor de um processo geral para resolver esse tipo de equação. Ver Baumgart (1993, p. 10). Vale salientar que, mesmo antes desse matemático, os números negativos já eram aceitos pelos hindus; além disso, eles já tinham conhecimento de que uma equação quadrática (de raízes reais) tem duas raízes.

No que diz respeito à forma de representação escrita, o desenvolvimento da notação algébrica evoluiu ao longo de três estágios: "o *retórico* (ou verbal), o *sincopado* (no qual eram usadas abreviações de palavras) e o *simbólico*", (BAUMGART, 1993, p. 3), que teria surgido por volta de 1500 e que também sofreu modificações e mudanças dessa época para a atualidade. Por essa classificação, as álgebras de al-Khowarizmi e de Bhãskara seriam, respectivamente, de estilo *retórico* e *sincopado*. A seguinte representação é mostrada a título de ilustração de uma forma simbólica da álgebra do século XVI: Girolamo Cardano (sábio italiano, 1545) escreveria *Cubus p 6 rebus aequalis 20*, que significa $x^3 + 6x = 20$. As representações simbólicas receberiam contribuições dos matemáticos e teriam ficado estáveis desde o final do século XVIII. Ver Baumgart (1993, p. 12).

O DIAGRAMA GREGO PARA O QUADRADO DA SOMA DE DOIS NÚMEROS

Dentre os principais produtos notáveis - que são aquelas multiplicações de uso freqüente no cálculo algébrico e que, para cada uma delas, normalmente se deduz uma regra de uso prático -, vale destacar, em importância para o presente trabalho, os seguintes: o quadrado da soma (ou da diferença) de dois termos e o produto da soma pela diferença de dois termos. Sendo *a* e *b* dois termos, o quadrado da soma é dado por $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

A identidade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ era concebido pelos gregos em termos do diagrama da Fig. 1 e era anunciado no Livro II d'*Os Elementos* de Euclides (apud BAUMGART, 1993, págs. 6 e 7), da seguinte maneira:

"Se uma linha reta é dividida em duas partes quaisquer, o quadrado sobre a linha toda é igual aos quadrados sobre as duas partes, junto com duas vezes o retângulo que as partes contêm".

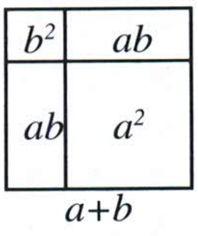

Fig. 1. Interpretação geométrica de $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

A Fig. 1 mostra uma (estreita) relação com os termos da expressão $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Quer dizer: o significado da figura acima é que o quadrado maior, de lado $(a+b)$, equivale à soma dos dois quadrados menores, a^2 e b^2, mais os dois retângulos iguais, que somam $2ab$. A Fig. 1 exemplifica a *álgebra geométrica grega*.

No que se refere à questão de ensino de matemática quando recorre à *álgebra geométrica grega,* o uso de exemplos semelhantes aos da Fig. 1 normalmente é feito apenas como uma visualização do produto notável referente.

A expressão matemática para o quadrado da soma de dois termos geralmente é desenvolvida, algebricamente, nos livros-textos de 7ª série, aplicando-se a propriedade distributiva. Contudo, também há abordagens pela via geométrica. Em Pierro Netto (1982, págs. 41-42), livro para a 7ª série, esse produto notável é apresentado de duas maneiras: a) *Geometricamente*: é mostrada a figura de um quadrado de lado $a+b$ e seu desdobramento em dois retângulos (iguais) e dois quadrados (diferentes); a conclusão, do livro, é que: *Portanto:* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; b) *Algebricamente*: nesse caso, o livro desenvolve aquela expressão aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Depois de mostrar pelo processo prático (multiplicação de $a+b$ por $a+b$), é, então, anunciada a regra:

"O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro, mais o dobro do produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo" (PIERRO NETTO, 1982, p. 42). Seguem-se exercícios para se calcular produtos notáveis.

A abordagem dos livros-textos que trazem ilustrações da álgebra geométrica grega pode não significar muito para o aluno, do ponto de vista construtivo, uma vez que parece limitada a uma *tradução* de uma expressão algébrica para seu equivalente geométrico, não obstante a importância que essa *visualização,* em termos de áreas planas, pode trazer para ele. Nesse caso, o uso da História da Matemática parece estar tendo um caráter apenas ornamental. No entanto, a História da Matemática pode ser usada em sala de aula de modo significativo para o aluno.

AL-KHOWARIZMI: RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

Al-Khowarizmi (*ca.* 780 — *ca.* 850), importante matemático árabe, foi autor de um livro prático sobre resolução de problemas de álgebra. Em seu mais importante livro de matemática, conhecido como *Al-jabr wa'l muqābalah,* al-Khowarizmi trata de aritmética e álgebra. O termo *Al-jabr* "significa 'restauração' ou complementação', e parece referir-se à transposição de termos subtraídos para o outro lado da equação", enquanto "a palavra *muqãbalah*, ao que se diz, refere-se à 'redução ou 'equilíbrio' — isto é, ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação" (BOYER, 1974, p. 167). A abordagem do livro de al-Khowarizmi trata de seis casos de equações lineares e quadráticas que têm uma raiz positiva, a saber: $ax^2 = bx$; $ax^2 = c$; $ax = c$; $ax^2 + bx = c$; $ax^2 + c = bx$; $ax^2 = bx + c$. Al-Khowarizmi sabia resolver esses seis casos particulares de equações seguindo os cálculos ensinados pelos matemáticos hindus e justificados por processos geométricos. Na resolução de uma equação, ele fazia transposição de termos mediante uma *al-jabr* e a redução de termos semelhantes aplicando *al-muqãbala* (ver D'AMBROSIO, 1994). Em outras palavras, o *al-jabr* e o *al-muqãbala* de Al-Khowarizmi correspondem, respectivamente, ao princípio aditivo (ou propriedade) da igualdade, e à redução de uma expressão algébrica a termos semelhantes.

Os princípios da igualdade constam nos livros de matemática da 6ª série (ver: SANGIORGI, 198?, p. 123, 6ª série; IEZZI, DOLCE, MACHADO, 1992, p. 90, 6ª série).

A propósito, cita-se o Livro I d'*Os Elementos* de Euclides, que contém uma lista com cinco postulados — que são as hipóteses básicas relativas à geometria plana — e cinco axiomas, aceitos como verdadeiros e, portanto, sem demonstração. Atualmente a maioria dos matemáticos não mais veria a necessidade de fazer essa distinção, e ambos os tipos de hipóteses seriam chamados de axiomas ou postulados, segundo Aaboe (1984). O Livro I d'*Os Elementos* de Euclides tem o seguinte axioma: "Se a grandezas iguais forem adicionadas grandezas iguais, as somas serão iguais" (*apud* AABOE, 1984, p. 58). É claro que uma interpretação atual desse axioma corresponde ao princípio aditivo da igualdade, que explica a transposição de termos com mudança de sinal numa igualdade.

Do ponto de vista social, o trabalho al-Khowarizmi sobre álgebra de pode ser visto como "essencialmente um método de resolução de problemas ligados à distribuição de bens e de terras, provenientes de heranças ou dotes seguindo os preceitos d'O Corão" (D'AMBROSIO, 1994, p. 47). Al-Khowarizmi também pode ter sido o responsável pela difusão da matemática hindu no mundo islâmico e pela sua penetração na Europa, a partir do século XII.

No presente trabalho, resgata-se, da História da Matemática o quadro geométrico usado por al-Khowarizmi com objetivo de abordar o desenvolvimento de um processo geral para resolução das equações de 2° grau, através de atividades didáticas. Salienta-se que a discussão que se segue estará, inicialmente, restrita aos números inteiros positivos. No entanto, no que diz respeito ao ensino, essa limitação não implicará prejuízo para a aprendizagem do aluno, pois, uma vez que ele tenha abstraído o processo geral, deverá libertar-se das representações concretas e resolver qualquer equação quadrática através da manipulação algébrica do processo geral alcançado, seguindo as regras para resolução. Aliás, o que se pretende mesmo é que a resolução algébrica, usando os símbolos e regras da matemática, seja alcançada com compreensão pelo aluno. Essa parte algébrica é complementada com uma discussão que também passa por geometria, qual seja, a da obtenção da segunda raiz (não positiva) da equação por processos de fatoração. Desse modo, acredita-se na viabilidade dessa abordagem para ajudar o aluno na aprendizagem e compreensão do processo de resolução de equações quadráticas.

O trabalho que segue compreende o seguinte: uma apresentação do método de al-Khowarizmi para a resolução de uma equação do 2° grau completa, usando a álgebra geométrica grega; uma generalização do processo de resolução desse tipo de equação; e, por último, uma discussão sobre o desenvolvimento algébrico da fórmula de Bhãskara, generalizada para os números reais, que é complementado (na parte de sugestões de atividades) com discussões ilustradas por figuras geométricas sobre fatoração de trinômio quadrado perfeito, numa abordagem que pode ser reproduzida em sala de aula.

A RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DO 2° GRAU USANDO O PROCESSO DE AL-KHOWARIZMI

Para se discutir o quadro geométrico *de* al-Khowarizmi, considere-se a equação $x^2 + 4x - 5 = 0$, da qual se quer obter a solução positiva para a variável x. A discussão que segue é explicada com representação algébrica e ilustrada por quadrados e retângulos. Quero deixar claro que optei por fazer uma apresentação em detalhes em virtude do objetivo didático do trabalho. A representação geométrica, ou o quadro geométrico de al-Khowarizmi, constitui-se na parte central da argumentação.

A idéia básica consiste em obter a área de um quadrado do qual se quer saber o valor do lado para determinar a incógnita da equação. Isso significa que é preciso escrever a equação dada na forma $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Porém, a expressão $x^2 + 4x - 5$ não é um quadrado perfeito, e, portanto, aí está o problema: como transformá-la num quadrado perfeito? (O que equivale a perguntar como fazer sua fatoração para obter um quadrado perfeito.)

Para al-Khowarizmi, a solução da equação $x^2 + 4x - 5 = 0$ (ou $x^2 + 4x = 5$) passa por um dos seis casos particulares listados acima.

Resolução da equação $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Fazendo-se inicialmente uma transposição de termos (i. é, fazendo uma *al-jabr*), a equação dada fica $x^2 + 4x = 5$, isto é, do (4°) tipo: $ax^2 + bx = c$.

O primeiro membro da equação é idêntico a $x^2 + 2x + 2x$.

Geometricamente, a expressão $x^2 + 2x + 2x$ significa: um quadrado (x^2) mais dois retângulos iguais $(2x + 2x)$, como mostra a Fig. 2.

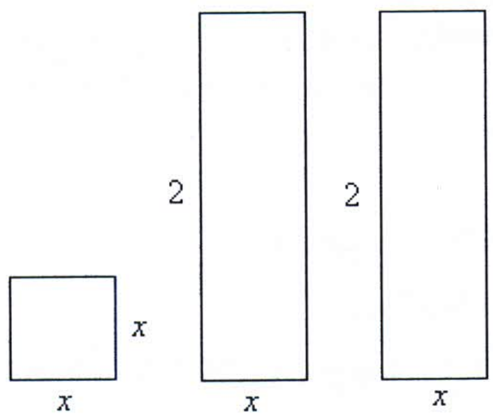

Fig. 2: Interpretação geométrica da expressão $x^2 + 2x + 2x$.

Tendo em vista a idéia básica da resolução, a questão é como formar um quadrado com os retângulos dados (ver Fig. 2). Verifica-se que cada retângulo tem um lado igual ao lado do quadrado. Assim, dispondo-se adequadamente os retângulos e o quadrado, obtém-se a Fig. 3. É evidente que a Fig. 3 sugere a construção de um quadrado de lado igual a $(x+2)$.

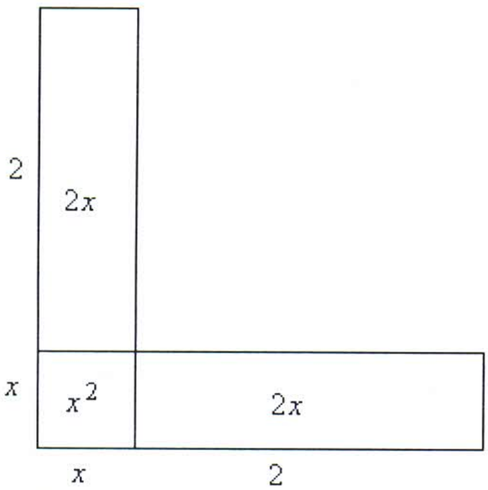

Fig.3: Interpretação geométrica de $x(x + 2) + 2x$

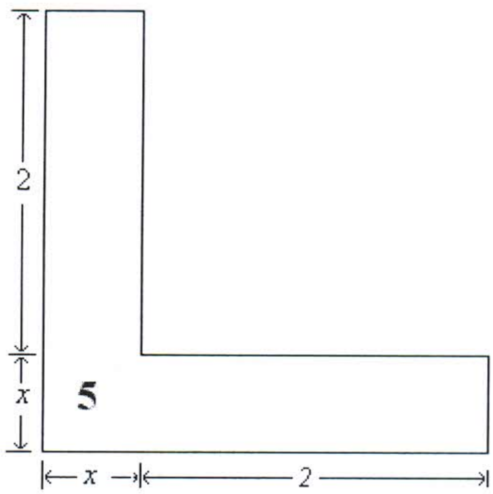

Fig.4: A área $x(x + 2) + 2x$ é igual a 5.

A interpretação algébrica da Fig. 3 permite escrever a expressão $x (x + 2) + 2x$.

A Fig. 4 foi desenhada para visualizar que a área do quadrado (x^2) mais as áreas dos dois retângulos ($2x + 2x$) é igual a 5.

Na Fig. 5, é evidente que a área na cor cinza é o complemento que falta para o quadrado de lado igual a $x + 2$, que é obviamente igual a 4.

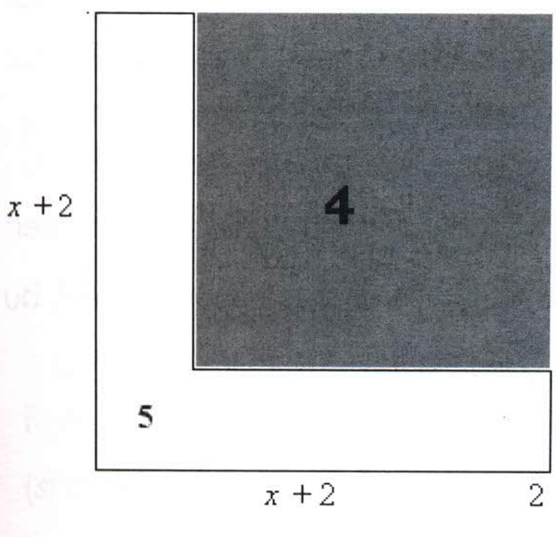

Fig. 5: A área do quadrado maior é dada por $(x+2)^2 = 5+4$.

Sendo a área do quadrado maior da Fig. 5 igual a $5 + 4 = 9$, então é claro que o lado desse quadrado é igual a 3 e, portanto, $x + 2 = 3$; logo, a solução óbvia, de al-Khowarizmi, para a equação $x^2 + 4x = 5$ é que $x = 1$.

Neste ponto, faço duas observações:

1ª) A solução da equação $x^2+4x-5=0$, que foi obtida com auxílio de uma argumentação geométrica, também deve ser discutida do ponto de vista da manipulação algébrica, salientando-se o uso dos princípios da igualdade e outras regras de manipulação algébrica.

Em termos de manipulação, a resolução algébrica de $x^2+4x-5=0$ fica assim:

(i) Transpondo-se termos da equação $x^2+4x-5=0$, para se completar o quadrado, obtém-se $x^2+4x=5$ (usando o princípio aditivo da igualdade $x^2+4x-5+5=0+5$).

(ii) Desmembrando-se os termos da equação para se (fazer a interpretação geométrica) completar o quadrado, obtém-se: $x^2+4x \equiv x^2+2x+2x$.

(iii) Completando-se o quadrado, i. é, adicionando-se **4** aos dois membros da igualdade (com base no desenho): $x^2+2x+2x+4=5+4$ (Obs.: A Fig. 3 pode ser composta nas duas partes: $x(x+2)+2(x+2)=9$, que trata de um caso simples de fatoração; e, também, como o produto de dois lados: $(x+2)(x+2)=9$, que é a fatoração por agrupamento), obtém-se a área do quadrado: $(x+2)^2=9$.

(iv) Para determinar o valor da incógnita, o aluno pode fazer:

a) $(x+2)^2=9 \Rightarrow (x+2)(x+2)=3\times 3 \Rightarrow x+2=3 \therefore x=1$, ou

b) $\sqrt{(x+2)^2}=\sqrt{9} \Rightarrow x+2=3 \therefore x=1$.

Em resumo, a abordagem acima possibilita dois movimentos na resolução da equação: o primeiro, da álgebra para a geometria, quando se recorre a uma interpretação geométrica da expressão algébrica; o segundo, um desenvolvimento algébrico com justificativa geométrica. A prática de outros exercícios certamente contribuirá para uma maturação do processo pelo aluno.

Vale salientar a importância do trabalho concreto nesse tipo de atividade. Trabalhando-se com figuras recortadas, ou mesmo desenhadas em papel ofício, a atividade de manipulação do material permite ao aluno fazer interpretações, verificações e discutir possibilidades num trabalho em grupo. Na linguagem de Piaget (1995), isso corresponde à abstração empírica; numa fase mais elaborada do processo de desenvolvimento, chamado de abstração reflexiva, o uso do material deverá estar superado pela linguagem simbólica.

2ª) Para determinar a outra raiz da equação $(x+2)^2=9$ - que, inicialmente, o aluno pode obter por um processo de tentativa e erro -, também é possível usar um artifício geométrico visando obter um processo algébrico que permita resolver a equação.

Observa-se que a equação $(x+2)^2=9$ corresponde ao segundo tipo das equações de al-Khowarizmi, qual seja: $ax^2=c$. No caso em foco, $c = 9$, isto é, um quadrado perfeito. Então, a equação acima pode ser reescrita como $(x+2)^2-3^2=0$, a qual se reconhece como uma diferença entre dois quadrados. Para se obter uma expressão algébrica equivalente a essa diferença de quadrados e se buscar a solução da equação, pode-se apelar para uma manipulação geométrica da diferença entre dois quadrados de áreas diferentes (o que era do conhecimento dos gregos)[2].

Considere-se dois quadrados de lados *r* e *s*, com $r>s$, tal que $r^2-s^2>0$, como mostra a Fig. 6. Em termos concretos, pode-se dizer que: retirando-se o quadrado s^2 do quadrado r^2, como mostra a Fig. 6, sobra a área em cinza. Recortando-se a área remanescente segundo o prolongamento de um dos lados (*s*) do quadrado menor, restam os retângulos de áreas $r(r-s)$ e $s(r-s)$.

Como esses dois retângulos têm um lado em comum, que é $(r-s)$, dispondo-os adequadamente, consegue-se formar o retângulo de área $(r+s)(r-s)$, como mostra a Fig. 7.

Logo, tem-se a seguinte equivalência de áreas: $r^2 - s^2 \equiv (r+s)(r-s)$, que pode ser assim descrita: *a diferença de dois quadrados é igual ao produto da soma pela diferença dos lados desses quadrados*. A seqüência das Figuras 6 e 7 ilustra bem o caso.

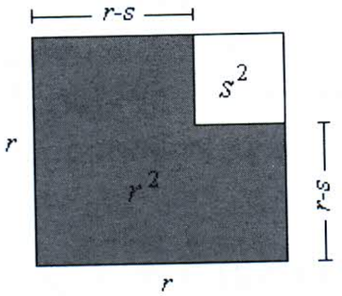

Fig.6: r^2-s^2

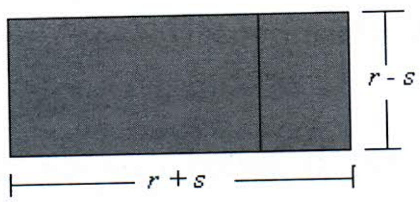

Fig.7: (r+s)(r-s)

Chama-se atenção para a importância de o aluno lidar com as figuras acima concretamente (manipular: observar, medir, riscar, cortar, justapor, *etc.*; representar simbolicamente e tirar conclusões), como um trabalho significativo no processo de aprendizagem (ver DIENES, 1970).

Observação: No caso acima, foi arbitrado que $r > s$, em virtude de tratar-se de uma interpretação geométrica. No entanto, no caso de uma atividade didática num nível mais abstrato, o aluno poderá verificar facilmente que a relação $r^2 - s^2 \equiv (r+s)(r-s)$ é válida para números reais, atribuindo valores para *r* e *s* e substituindo nessa relação de eqüivalência.

Desse modo, a relação obtida para uma diferença entre dois quadrados pode ser generalizada algebricamente. Assim, em relação à equação $(x+2)^2 - 3^2 = 0$, pode ser escrita a seguinte equivalência: $(x+2)^2 - 3^2 \equiv [(x+2)+3][(x+2)-3]$.

Em conseqüência: $[(x+2)+3][(x+2)-3] = 0$. Ora, para que o produto de dois números seja nulo, um dos fatores deve ser nulo, então: $[(x+2)+3] = 0$, que resulta em $x=-5$, isto é, a segunda raiz da equação; ou $[(x+2)-3]=0$, onde x = 1, como já foi determinado.

Em conclusão, equações escritas na forma $x^2-y^2=0$ podem ser resolvidas pelo caso de fatoração explicado acima.

Assim, novamente uma interpretação geométrica de uma expressão algébrica mostrou-se útil para a descoberta e generalização de um processo para resolução de uma equação.

DESENVOLVENDO A FÓRMULA DE BHĀSKARA USANDO O QUADRO GEOMÉTRICO GREGO

Atribui-se ao matemático hindu Bhãskara (séc. XII) o desenvolvimento de um processo especial para resolução das equações quadráticas. A dedução dessa fórmula, que costuma ser apresentada nos livros-textos de matemática (8ª série do I° grau), consiste numa manipulação algébrica da forma canônica $ax^2+bx+c=0$ para explicitar a variável *x* em função dos coeficientes *a*, *b* e *c*.

No presente trabalho, o referido algoritmo é desenvolvido através de um processo que chamo de algébrico-geométrico, a exemplo da discussão acima levada a efeito sobre o processo de al-Khowarizmi. Desse modo, novamente se recorre à interpretação geométrica de uma expressão algébrica para se obter o completamento do quadrado da expressão algébrica através da sua *visualização geométrica* (por uma intuição matemática).

Vale salientar o seguinte: Que 1

presente abordagem pressupõe, inicialmente, que os coeficientes *a, b,* *c e* a variável *x* da equação, na sua forma canônica $ax^2+bx+c=0$, são positivos; além disso, para facilitar a interpretação geométrica, primeiramente é discutido o caso particular em que o coeficiente *a* será igual a 1, o que equivale a dividir a equação por *a*,

obtendo-se: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$.

Tendo-se em vista facilitar a interpretação geométrica da expressão $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, ou $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$, faz-se a seguinte mudança de parâmetros:

115

Sejam $\frac{b}{a} = p$ e $\frac{c}{a} = q$; assim, a equação acima fica: $x^2 + px = -q$.

A expressão $x^2 + px$ pode ser interpretada geometricamente para completar o quadrado. A expressão $x^2 + px$, equivalente a $x^2 + \frac{p}{2}x + \frac{p}{2}x$, pode ser representada geometricamente por um quadrado e dois retângulos iguais a $\frac{p}{2}x$, como na Fig. 8, com o objetivo de compor um outro quadrado para determinar o termo que o completa, como se vê na seqüência.

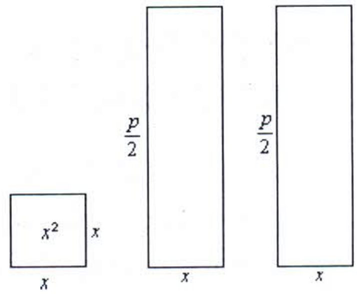

Fig. 8: Interpretação geométrica de $x^2 + \frac{p}{2}x + \frac{p}{2}x$

A Fig. 9 mostra os retângulos (da Fig.8) dispostos adequadamente de modo a formar um quadrado, de lado $x + \frac{p}{2}$. Observa-se que o quadrado $\frac{p^2}{4}$, em cinza, é a figura que falta para completar o quadrado de área $\left(x+\frac{p}{2}\right)\left(x+\frac{p}{2}\right) \equiv \left(x+\frac{p}{2}\right)^2$. De acordo com a Fig. 9, a área do quadrado de lado $x + \frac{p}{2}$ é igual a: $x^2 + 2\left(\frac{p}{2}\right)x + \left(\frac{p}{2}\right)^2$

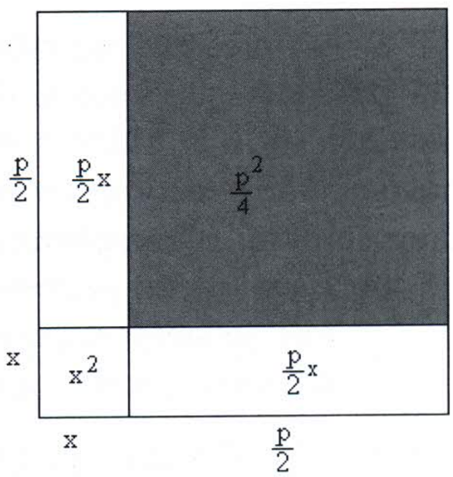

Fig. 9: Quadrado de área igual a:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)\left(x+\frac{p}{2}\right) \equiv \left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

Uma vez que o quadrado foi completado, a Fig. 9 cumpriu seu papel na parte de manipulação concreta da dedução. A atenção pode se voltar agora para a equação do problema, a parte algébrica.

Ora, como $x^2 + px = -q$, então: $x^2 + 2\left(\frac{p}{2}\right)x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$, (o que equivale a adicionar $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ à equação, aplicando-se o princípio aditivo da igualdade).

Logo, de acordo com a Fig. 9, a seguinte relação algébrica pode ser escrita: $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$. Observa-se que para continuar a dedução pela via geométrica se poderia interpretar o lado direito da igualdade em termos da área de um quadrado, como se segue.

Cabe, então, escrever a seguinte equivalência: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \equiv \left\{\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^2$.

Então: $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left\{\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^2$, ou $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left\{\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^2 = 0.$

Essa última expressão, que significa a diferença entre dois quadrados, também pode ser interpretada geometricamente, como já foi visto acima (ilustrado pelas Figuras 6 e 7).

Desse modo, seguindo-se a mesma abordagem, recorre-se à interpretação geométrica da diferença de dois quadrados, supondo-se que essa diferença seja positiva, no sentido de se obter uma equivalência de áreas e se usar esse fato em termos algébricos. A explicação que se segue será feita passo a passo para permitir um melhor acompanhamento, numa analogia com as Figuras 6 e 7.

Voltando a discutir a respeito da resolução da expressão algébrica obtida acima, $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left\{\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^2 = 0$, pode-se interpretá-la em termos do resultado obtido com as áreas das Figuras 8 e 9. Desse modo, obtém-se a seguinte equivalência com as regras de operação:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left\{\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^2\equiv\left\{\left(x+\frac{p}{2}\right)+\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\left\{x+\frac{p}{2}-\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right]^{\frac{1}{2}}\right\}=0$$

Substituindo-se de volta: $p=\frac{b}{a}$ e $q=\frac{c}{a}$, então a expressão fica:

$$\left[x+\frac{b}{2a}+\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left[x+\frac{b}{2a}-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]=0$$

Usando-se a condição de nulidade de um produto para examinar cada um dos fatores da expressão acima, obtém-se as seguintes formas:

$$x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}=0\Leftrightarrow x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad\text{(I)}$$

ou:

$$x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}=0\Leftrightarrow x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad\text{(II)}$$

As formas (I) e (II) podem ser resumidas numa única expressão:

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (III), que é a fórmula para resolução de equações do 2° grau, conhecida como a *Fórmula de Bhãskara* (que, obviamente, não tinha essa representação simbólica no séc. XII).

A fórmula (III) é válida para os coeficientes *a*, *b* e *c* reais, com $a\neq 0$.

DETERMINAÇÃO ALGÉBRICA DO TERMO $\frac{b^2}{4a}$ PARA DEDUÇÃO DA FORMA GERAL

O termo que completa o quadrado na expressão $ax^2+bx+c=0$, necessário para sua fatoração e desenvolvimento da fórmula, também pode ser determinado apenas do ponto de vista algébrico, isto é, sem se recorrer à interpretação geométrica. A apresentação que segue não é comum nos livros textos. Assim, para a determinação algébrica de $\frac{b^2}{4a}$, tomando-se como ponto de partida a forma geral $ax^2+bx=-c$, fazem-se algumas restrições objetivando simplificar a exposição que se segue.

Supondo-se, inicialmente, a existência de um certo $y > 0$, tal que o primeiro membro da equação $ax^2+bx+y=y-c$ (com a, b e x positivos) seja um trinômio quadrado perfeito, o objetivo é mostrar que $y=\frac{b^2}{4a}$.

Sendo ax^2+bx+y um trinômio quadrado perfeito, então sua fatoração é dada por: $(\sqrt{a}x+\sqrt{y})^2$; mas, como essa expressão é o quadrado da soma de dois termos, então se tem a seguinte equivalência:

$$(\sqrt{a}x+\sqrt{y})^2 \equiv ax^2+2\sqrt{ay}x+y.$$

Porém, os dois trinômios se equivalem, pois, por hipótese, ax^2+bx+y é um quadrado perfeito.

Então, verifica-se a seguinte equivalência: $ax^2+2\sqrt{ay}x+y \equiv ax^2+bx+y$, cuja simplificação leva a: $2\sqrt{ay}x=bx \therefore \sqrt{ay}=\frac{b}{2}$; como $\sqrt{ay}>0$, então: $y=\frac{b^2}{4a}$ como se queria determinar.

Substituindo-se $y=\frac{b^2}{4a}$ em $ax^2+bx+y=y-c$, obtém-se a expressão algébrica $ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}=\frac{b^2}{4a}-c$, ou multiplicando-se por $\left(\frac{1}{a}\right)$, então $x^2+\left(\frac{b}{a}\right)x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$.

Observação: Essa dedução reitera a determinação de $\frac{b^2}{4a}$ pelo processo geométrico, como feito na discussão anterior. Mas, parece evidente que, do ponto de vista didático, a dedução pela via geométrica se torna mais interessante (ou consubstanciada) pela própria intuição do desenho geométrico.

A expressão $x^2+\left(\frac{b}{a}\right)x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$ pode agora ser reduzida utilizando-se os casos de fatoração (fator comum, agrupamento, trinômio quadrado perfeito e diferença de dois quadrados) obtendo-se o seguinte desenvolvimento:

$x^2+\left(\frac{b}{2a}\right)x+\left(\frac{b}{2a}\right)x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ ou $x\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{b}{2a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$,

donde: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left[\left(\frac{1}{2a}\right)\sqrt{b^2-4ac}\right]^2$, cuja fatoração conduz, como já vimos, à fórmula geral da equação (III).

Algumas observações sobre o radicando *(b^2-4ac)* complementam a dedução.

1) Observa-se que: quando $b^2-4ac>0$, e lembrando que $4a^2>0$ (para $a\neq 0$), então a expressão $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, *ou*

$\left(\frac{1}{2a}\right)\sqrt{b^2-4ac}$, corresponde ao quadrado representado por $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, como mostra a Fig. 10.

2) Quando ocorre b^2-$4ac$=0, então o primeiro membro de $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$, que só se anula para $x=-\frac{b}{2a}$ (sendo, portanto, a única solução algébrica possível), geometricamente é um quadrado de lado $x+\frac{b}{2a}$.

3) Por outro lado, se $b^2-4ac<0$, então a equação $x=\frac{1}{2a}\left(-b\pm\sqrt{b^2-4ac}\right)$ não representa uma área plana (um quadrado). Em outras palavras, $\sqrt{b^2-4ac}$ não é um número real. No caso em questão, isso equivale a escrever a expressão: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)=0,$ o que se caracteriza como uma impossibilidade do ponto de vista matemático.

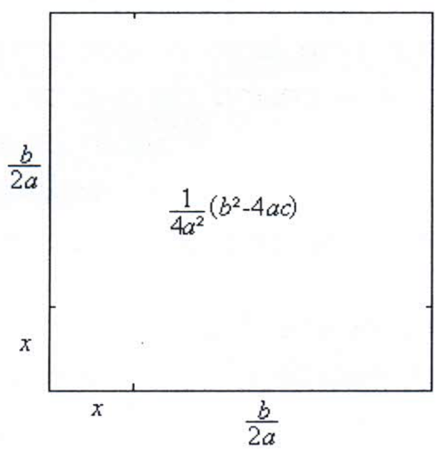

Fig.10: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

Por último, chama-se atenção para o seguinte: sendo $b^2 - 4ac$ um número real maior ou igual a zero, a expressão $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ não significa que esse número tenha duas raízes, pois a raiz quadrada de um Número Real é uma operação em $\Re$ e, como tal, deve ser unívoca. Lembrando que a expressão $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ é o resultado da união de duas fórmulas, como visto acima, então:

$x = \frac{1}{2a}\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$ e $x = \frac{1}{2a}\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$, que, combinadas, formam:

$x = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$. Além do mais, essa fórmula não afirma, por si só, o duplo sinal da raiz quadrada de um número real positivo.

ALGUMAS SUGESTÕES DE ATIVIDADES

A seguir, são apresentadas algumas sugestões de exercícios para o aluno. Uns exercícios já estão feitos e servem de exemplos. Optou-se por poucos exercícios pelas seguintes razões:

(i) a aprendizagem depende menos da quantidade de exercícios do que da maneira como são realizados, quer dizer, como uma investigação matemática;

(ii) os livros-textos de matemática de 8ª série trazem muitos exercícios que devem servir para esse tipo de resolução;

(iii) além disso, vale lembrar que um dos objetivos desse trabalho é que o ensino de álgebra via geometria seja um facilitador da aprendizagem dessa matéria e que o aluno aprenda a resolver problemas através da interpretação e manipulação algébrica dos dados.

Quanto ao uso de material concreto, fica a critério do professor escolher um tipo adequado para fazer as representações geométricas, que pode ser, por exemplo, retângulos recortados em papel rígido ou em material *eva* (também conhecido como material emborrachado), ou, ainda, se preferir, através de desenhos. Além do mais, a necessidade do aluno em relação ao apóio do material não é necessariamente a mesma para todos de uma turma, o que exige atenção do professor para intermediar o processo de atividade de ensino.

Por último, o uso do material nesse trabalho deve estar associado à questão das representações simbólicas e de seus significados. Afinal, faz parte do objetivo geral desenvolver o pensamento abstrato sobre a matéria e saber usar as representações simbólicas na comunicação matemática.

ATIVIDADES

1. O objetivo dessa primeira atividade é completar o quadrado em cada expressão usando o processo geométrico discutido no texto. Nos itens (a) e (b) as expressões são dadas na forma incompleta para simplificar a interpretação e construção do quadrado, sendo que em (b) uma das dimensões dos retângulos obtidos é um número racional $\left(\frac{5}{2}\right)$; a expressão (c), que não se enquadra em nenhum dos 6 casos de al-Khowarizmi, também pode ser resolvida com auxílio de interpretação geométrica, como é mostrado através da Fig. 11.

a) x^2+6x *b)* x^2+5x *c)* x^2+6x+8

A Fig. 11, que é uma interpretação de x^2+6x+8 por áreas, mostra claramente que falta um quadradinho para que a área maior possa ser expressa como $(x+3)(x+3)$. Logo, de acordo com o desenho a expressão acima pode ser escrita como a seguinte equivalência: $x^2+6x+8+1=(x+3)(x+3)$.

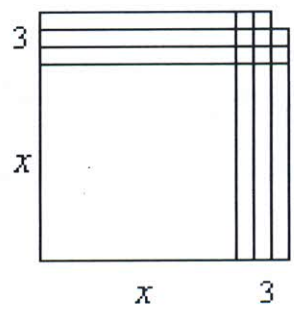

Fig. 11: $x^2+6x+8+1=(x+3)(x+3)$

2. Objetivo: completar o quadrado e resolver as equações abaixo para determinar uma solução positiva.

a) $x^2+3x-4=0$ *b)* $8x^2+2x-1=0$

3. Objetivo: Determinar, por fatoração, a outra solução de cada equação da atividade 2.

4. Obter, por processo geométrico, a fatoração do trinômio[3]: $x^2 - 4x + 4 = 0$. A Fig. 12 mostra a interpretação geométrica de cada um dos termos do trinômio dado.

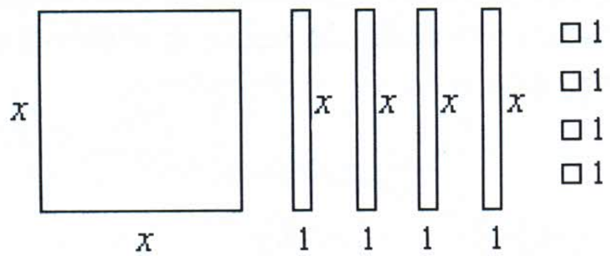

Fig.12: Um quadrado (x^2), quatro retângulos iguais 4(1x) e 4 unidades.

A seqüência das Figuras:13-16 mostra que, à medida que se subtrai um retângulo de área 1x, do quadrado x^2, a partir da segunda subtração se torna necessário compensar com a adição de um quadrado unitário. É interessante a resolução concreta dessa questão, pois a manipulação física do material permite visualizar a solução passo a passo e escrever o referente simbólico. Para tanto, é preferível que o aluno recorte as figuras como ilustrado abaixo.

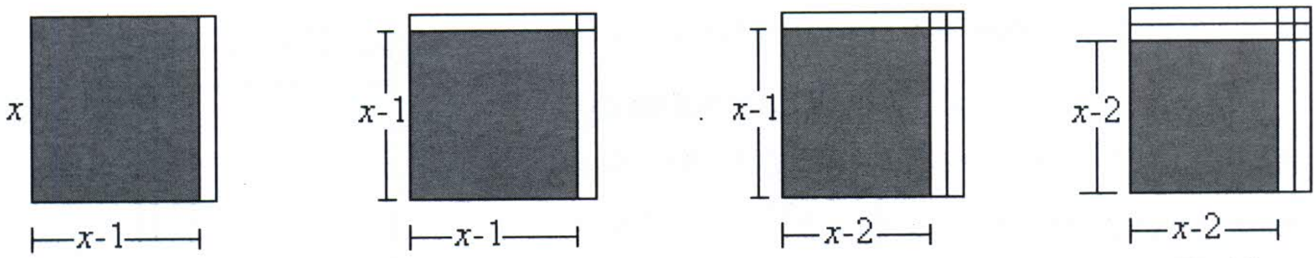

Fig.13 Fig.14 Fig.15 Fig.16

As áreas remanescentes das Figuras 13 a 16 são dadas pelas expressões abaixo:

Fig.13: $x^2 - x = x(x-1)$ Fig. 14: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1)$

Fig. 15: $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ Fig. 16: $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

5. Fatorar, usando geometria, as expressões:

a) $a^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$ sendo $a > \frac{1}{2}$; b) $x^2 + 4x + 4$ c) $x^2 + 5x + 6$.

6. O primeiro caso particular das equações de al-Khowarizmi, correspondente à equação incompleta $ax^2 = bx$, também pode ser visualizado concretamente para ajudar o aluno no entendimento do caso mais simples de fatoração, o fator comum. Seja, por exemplo, resolver a equação $x^2 = 3x$. É claro que por tentativa e erro o aluno poderia concluir que as soluções são *x=3* e *x=0*. Porém, a fatoração dessa equação pode ser obtida pela interpretação geométrica de $x^2 = 3x$ (um quadrado de lado *x* com área equivalente a três retângulos iguais de lados *1* e *x)*. Fica para o leitor discutir e concretizar passo a passo a solução dessa equação.

NOTAS

1 Para uma discussão sobre aprendizagem de conceitos algébricos fundamentais, ver Rodrigues Neto (1998).

2 A diferença de dois quadrados fazia parte da álgebra geométrica grega (ver BOYER, 1974, p. 57)

3 Sendo, por exemplo, $a^2 + 2ab + b^2$, os livros textos da 7ª e/ou 8ª séries ensinam como testar se a expressão dada é um quadrado perfeito verificando se $2\sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2} = 2ab$. (Ver: PIERRO NETTO, 1982, p. 56)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AABOE, Asger. **Episódios da História Antiga da Matemática**. Brasília: SBM, 1984. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar.

BAUMGART, J. K. **História da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1993. (Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula; v. 4)

BONGIOVANNI, V., LEITE, O. R. V., LAUREANO, J. L. T. **Matemática e Vida.** Trabalhando com números, medidas e geometria. 4 ed. S. Paulo: Ática, 1991. (8ªs. lg.)

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

BRZEZINSKI, F. (org.) **LDB interpretada**. São Paulo: Cortez, 1997.

CASTRUCCI, B., GIOVANNI, J. R., GIOVANNI JR., J. R. **A Conquista da Matemática**.São Paulo: FTD, 1998. Coleção A Conquista da Matemática. (8ª série)

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**-da teoria à prática. 4 ed. Campinas/SP: Papirus, 1996.

D'AMBROSIO, U. Al-Kwarizmi e sua importância na matemática. In: **Temas & Debates**. Blumenau/SC: SBEM, 1994. Ano VII, nº4. (págs. 40 a 47)

DIENES, Z. P. **Aprendizado Moderno da Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970.

FOSSA, J. A. **Ensaios Sobre Educação Matemática**. Belém: EDUEPA, 2001.

IEZZI, G., DOLCE, O., MACHADO, A. **Matemática e Realidade**. 2 ed. São Paulo: Atual, 1992. (6ª série, Primeiro Grau)

PIAGET, Jean. **Abstração Reflexionante**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PIERRO NETTO, Scipione di. **Matemática.** Conceitos e operações. São Paulo: Saraiva, 1982. (8ª série, 1° grau)

POLYA, G. **A arte de Resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

RODRIGUES NETO, F. P. **Completando o Quadrado –Por Geometria– Para Deduzir a Fórmula de Bhãskara**. Mossoró/RN: ESAM, 1990. (Coleção Mossoroense, série A, n. XXXVIII)

RODRIGUES NETO, F. P. **Um estudo sobre aprendizagem de conceitos algébricos fundamentais**. Natal: UFRN, 1998. (Tese Doutorado, 270 p.)

SANGIORGI, O. **Matemática**. São Paulo: Cia. Editora Nacional, 198(?). (8ª série)