**TRADUÇÃO**

# A matemática universal de Descartes e a Física*

Léon Brunschvicg

## A IDEIA DA MATEMÁTICA UNIVERSAL

65. — A gênese da geometria analítica de Fermat esclarece em certa medida a filosofia matemática de Descartes. De fato, de acordo com a quarta das *Regulae ad directionem ingenii*[1] e a segunda parte do *Discurso do Método*[2], duas disciplinas são exceções da interdição que Descartes opõe sistematicamente à filosofia e à ciência que lhe foram ensinadas. Nomeadamente: a aritmética e a geometria.

Em sua forma elementar: *aritmética de Pitágoras* e *geometria de Euclides*, essas ciências são os modelos da verdadeira lógica: "A aritmética e a Geometria... tratam de um objeto tão puro e simples que não supõem nada que a experiência possa mostrar incerto, mas, antes, consistem inteiramente em deduzir consequências via raciocínio [*Arithmetica et Geometria... circa objectum ila purum et simplex versantur, ut nihil plane supponant, quod experiientia reddiderit incertum, sed toise consistunt in consequentiis rationabiliter deducendis*]"[3]. Na forma superior que lhes foi dada por Apolônio e Viète (Descartes os chama "Pappus e Diofanto"[4]), elas manifestam sua fertilidade ao engendrar, por

* Tradução por Gionatan Carlos Pacheco, a partir do original Brunschvicg, L. (1912). La mathématique universelle de Descartes et la Physique. In: *Les Étapes de la Philosophie Mathématique*, cap. 7 (sec. B). Paris. Reprinted by Blanchard, Paris. pp. 105-113. (Disponível em: https://archive.org/details/lestapesdelaph00brun, acesso 9/3/21.)

[1] Descartes, In: *Oeuvres de Descartes*, Edit. Charles Adam & Paul Tannery (doravante designada por *AT*), X, p. 373.

[2] *AT*, VI, pp. 17-sqq.

[3] *Reg.*, II, *AT*, X, p. 365.

[4] *Ibid.*, IV, *AT*, X, p. 376.

um lado, "uma certa análise que os antigos geômetras haviam feito embora se recusassem a revelar o seu segredo, por outro, um certo tipo de aritmética a que se chama álgebra e que permite operar sobre os números como os antigos faziam sobre as figuras"[5].

Contudo, a análise dos antigos e a álgebra dos modernos sacrificaram, em favor da amplitude dos resultados, a simplicidade e a pureza dos princípios. Estas precisam se reorganizar, se fundirão para constituírem um método universal. O princípio deste método consiste em elevar-se acima da representação das figuras, e em trazer à tona o que é comum a "todas essas ciências particulares que são comumente nomeadas de Matemáticas (...) Embora seus objetos sejam diferentes, elas não deixam todas de concordar umas com as outras, no sentido de que não consideram outra coisa senão as várias razões ou proporções que aí se encontram"[6].

Nessa concepção, a geometria conserva um papel: para examinar "essas proporções em geral", convém as "supor (...) nos tópicos que serviriam para tornar o seu conhecimento mais fácil". Esses *tópicos*, isto é, os termos particulares destinados a ser o suporte de relações gerais, deverão, observa Descartes, ser as linhas, porque não haveria "nada mais simples, nem que eu possa representar mais distintamente à minha imaginação e aos meus sentidos". Mas a relação que se acrescenta aos termos "para retê-los ou compreendê-los vários juntos", e que é o objeto próprio da matemática universal, não está sujeita à natureza geométrica das linhas. Esta pode ser explicada "por alguns números, os menores possíveis. Por esse meio", conclui Descartes, "eu pegaria emprestado o melhor da Análise geométrica e da Álgebra, e corrigiria todas as falhas de uma pela outra"[7].

66. — Assim, segundo o *Discurso do Método*, uma inspiração, que lembra muito o *Isagoge* de Fermat, explicaria a gênese da *matemática universal*. Resta saber qual é exatamente, se o tomarmos nele mesmo, o escopo dessa matemática universal.

A resposta a esta pergunta será diferente, dependendo se considerarmos a obra de Descartes dentro da filosofia geral, isto é, a extensão do método matemático à universalidade dos problemas cosmológicos, ou se vamos nos concentrar apenas na obra que Descartes realiza no domínio próprio da matemática, reduzindo os problemas de geometria aos problemas de álgebra.

---

[5] *Ibid.*, X, p. 373.
[6] *AT*, VI, p. 19.
[7] *Ibid.*, VI, p. 20.

Não há dúvida de que os dois esforços procedem do mesmo espírito. Eles estão conectados, entretanto seria incorreto concluir que eles podem ser reduzidos um ao outro. O primeiro é uma reforma da física pelas matemáticas, mas que nada toma emprestado da técnica da nova geometria, enquanto o segundo é uma reforma da própria matemática. O que deu azo a confundi-los, e que por vezes tornou inextricável a interpretação do pensamento cartesiano, é que ambas as obras partem da noção de espaço.

Porém, é importante dizê-lo desde já, a fim de orientar o leitor em nossa dupla apresentação: o espaço desempenha na física de Descartes e na geometria de Descartes dois papéis muito diferentes. Na física, a redução da qualidade à quantidade consiste em reter dos fenômenos sensíveis apenas determinações que podem ser medidas com o auxílio das dimensões da extensão. Na geometria, ao contrário, as figuras espaciais aparecem como espécies de qualidades, que serão reduzidas às formas puramente abstratas e intelectuais da quantidade, aos graus da equação.

Em suma, os *Princípios de Filosofia* são uma física de geômetra; a *Geometria* é uma geometria de analítico. Assim, é explicado que, seguindo as direções traçadas por ambas as obras, chega-se a duas concepções claramente distintas de filosofia matemática.

## AS DIVERSAS FUNÇÕES DO ESPAÇO NAS "REGULAE"

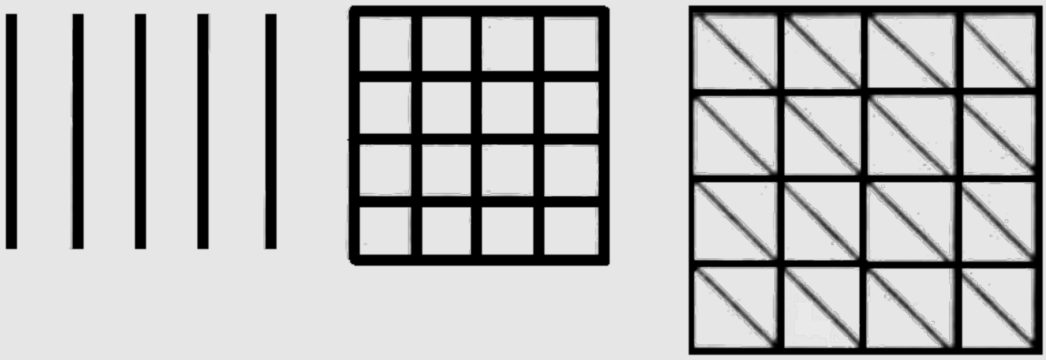
67. — A primeira dessas concepções surge das *Regulae*, que datam provavelmente por volta do ano de 1628[8]. A ideia fundamental é que a ciência é essencialmente una, porque ela é a inteligência humana operando, e que não há mais que uma maneira de compreender[9]. O método é único para dispor os dados complexos de um problema seguindo uma ordem inteligível, de modo a ter apenas uma cadeia de relações simples entre elementos simples: "Sejam por exemplo 3 e 6 os dois primeiros termos de uma progressão geométrica; nada é mais simples do que determinar o terceiro por dedução; apenas observe que 6 é o dobro de 3 e encontre o dobro de 6, que é 12"[10]. Constitui-se uma série de relações que fornecerá tantos termos quantos quisermos. A solução do problema é perfeita quando a série tem uma ordem, ou seja, quando podemos, como no caso da progressão

[8] Nota da edição Adam-Tannery, X, pp. 485-sqq.
[9] *Reg.*, I. *AT*, X, p. 360.
[10] Hannequin, *La méthode de Descartes*, *Etudes d'histoire des sciences et d'histoire de la philosophie*, t. I, 1908, p. 222 (Paris, F. Alcan), de acordo com a *Reg.* VI, *AT*, X, pp. 384-sqq.

geométrica, passar de um elemento a outro graças a um "movimento contínuo e ininterrupto do espírito", fundando-se em uma relação inicial que pode ser apreendida no ato único e indivisível da intuição, a partir do simples ou, como diz Descartes, do *absoluto*. Podemos ver a partir desse exemplo que a matemática é a ciência da *ordem*, bem como a ciência da *medida*; e compreende, além da aritmética (ou álgebra) e da geometria, a astronomia, a música, a óptica, a mecânica[11].

68. — Para a constituição da ordem, Descartes, de modo geral, recomenda aproveitar a simplicidade das imagens espaciais[12]. Mas o alcance desta prescrição varia completamente de acordo com a aplicação a ser feita dela.

Assim, as *Regulae* consideram o caso em que a representação geométrica não é muito mais que um esquema convencional. "Pode-se supor que a cor seja o que se quiser, mas não se poderia negar que seja extensa e, portanto, que tenha uma figura. Qual inconveniente resultaria se, sem admitir inutilmente ou forjar levianamente uma nova essência, sem negar nada das opiniões dos outros, nos contentarmos em reter apenas o que tem a natureza da figura e conceberemos a diversidade que existe entre o *branco*, o *azul*, o *vermelho*, etc., como a que existe entre figuras como essas?



"E o mesmo pode ser dito de todas as coisas, pois é certo que a infinita multidão de figuras é suficiente para expressar todas as diferenças sensíveis."[13]

Dessa forma, a introdução da noção de espaço não teria senão um valor metodológico[14]. Ela significaria apenas que, para imaginar clara e distintamente as diferenças que lhe são dadas como qualitativas, o estudioso precisa fazê-las

[11] *Reg.*, IV, *AT*, X, pp. 377-sqq.
[12] *Reg.*, XIV, *AT*, X, p. 441.
[13] *Reg.*, XII, *AT*, X, p. 413. Cf. Berthet, *La méthode de Descartes avant le Discours*, Revue de Métaphysique, 1896, pp. 409-sqq.
[14] Deve-se notar que, no *Valerius Terminus of the Interpretation of Nature* (que não foi, é verdade, publicado até 1734), Bacon usou símbolos análogos. (Lalande, *Sur quelques textes de Bacon et de Descartes*, Revue de Métaphysique, 1911, pp. 309 e 311, com referência a Bacon. Ed. Ellis, Spedding el Heath, t. III, Londres, 1876, p. 237.)

corresponder a gráficos de acordo com o método prático que Nicolas Oresme inventou e popularizou. Se operássemos sobre esses símbolos, como faríamos sobre as próprias cores, para captar as consequências de sua diversidade, teríamos apenas uma série de hipóteses, destituídas de consistência intrínseca, destinadas sobretudo, como queriam os astrônomos gregos, *para manter* os fenômenos, para coordenar as aparências[15].

69. — Porém, se Descartes marcou claramente o papel que o espaço seria capaz de desempenhar como esquema arbitrário que forneceria as verdadeiras conexões dos fenômenos, não há dúvida de que o mecanismo cartesiano tem outra ambição. Não critica Descartes o matematismo experimental de Galileu precisamente porque Galileu se limita, como o fará Newton mais tarde, a buscar por indução a fórmula das leis naturais? Não é suficiente conhecer "as razões de alguns efeitos particulares"; constrói-se "sem fundamento", enquanto não se considera "as primeiras causas da natureza"[16].

Em outras palavras, como o próprio Descartes distinguia uma moralidade "provisória" daquilo que teria, no final de sua filosofia, constituído sua moral definitiva, é necessário distinguir um *método provisório*, isto é, um artifício destinado a transpor os problemas, quaisquer que sejam, para um quadro adaptado às funções do espírito e um método definitivo, apoiado na relação geral do espírito com as coisas, e que, segundo Descartes, implica uma teoria exata de Deus.

Este método definitivo se funda no espaço, na medida em que o espaço é adequado para a realidade das coisas. No entanto, esta adequação será obtida efetivamente, desde que o espaço sofra uma elaboração que simplifique e generalize a sua noção. O espaço, tal como os antigos geômetras o viram, é um sistema de figuras suscetíveis de serem medidas ao longo de três dimensões; graças à enumeração dessas dimensões, os problemas da geometria são assaz fáceis de determinar. Por outro lado, as grandezas no espaço representam os três primeiros graus das grandezas aritméticas ou algébricas: "a quantidade simples [chamada de primeiro grau na álgebra moderna] é chamada de *raiz*; a segunda é chamada de *quadrado*; a terceira *cubo*, a quarta *biquadrada*, etc"[17]. A simplicidade imaginativa desta correspondência é sedutora, e Descartes admite que ele próprio se deixou enganar por muito tempo. No entanto, ela é enganosa. Com efeito, os graus de grandeza nunca são mais do que relações com uma dada unidade; a

[15] Ver a *Nota* de MENTRÉ, F.: *La théorie physique d'après Descartes*. Revue de Philosophie, out. 1904, pp. 218-sqq.
[16] Cf. *Carta a Mersenne* de 11 de outubro de 1638, *AT*, II, p. 380.
[17] *Reg*. XVI, *AT*, X, p. 436.

quantidade do primeiro grau, "a raiz, é um primeiro proporcional; o quadrado é um segundo proporcional, etc". Ora, de acordo com a *Regra XV*, a unidade pode ser, conforme a vontade, ou *superfície* ou *comprimento* ou *ponto*. O essencial é a representação de um elemento extenso que se presta em todos os sentidos a uma extensão ilimitada[18].

Descartes, é verdade, não acrescenta aqui (o que esperamos que ele diga, e o que ele de fato diz na *Geometria*) que a composição desses graus pode ser feita no interior de uma única dimensão espacial, que o produto de dois ou mais comprimentos pode ainda ser representado por um comprimento. Devemos ver nesta reserva apenas sua tendência eterna para a prudência e a desconfiança? Ou devemos acreditar que nas *Regulae* ele ainda não havia levado os princípios da geometria analítica ao estado de um método claro e distinto?

Em todo caso, o que devemos lembrar dessas *Regras XIV* e *XVI* é que o pensamento de Descartes gira em torno da dimensão espacial. O elemento da *dimensão espacial* é o comprimento; podemos partir do comprimento para reconstituir a realidade espacial, como uma multiplicidade tridimensional. Mas esse modo de composição é, aos olhos de Descartes, apenas um caso particular no modo de composição das magnitudes. Qualquer elemento análogo ao comprimento pode ser considerado uma dimensão, e introduziremos em um problema quantas dimensões quisermos. Consequentemente, a *representação espacial* da dimensão não depende mais da *natureza espacial* da dimensão: "não só — diz Descartes — comprimento, largura e profundidade são dimensões, mas também a gravidade é a dimensão segundo a qual as coisas são pesadas; velocidade é a dimensão do movimento, e igualmente há outras infinitas. Qualquer modo de divisão em partes iguais, seja efetiva ou intelectual, constitui uma dimensão segundo a qual se faz a numeração"[19]. Tantas as dimensões dadas em um problema, tantos serão os elementos quantitativos cuja medição pode ser indicada naturalmente por uma representação espacial.

---

[18] *AT*, X, p. 453: "em primeiro lugar, representamos a unidade de três modos, a saber, por meio do quadrado, □, se a considerarmos como longa e ampla, ou por meio de uma linha, —, se a considerarmos somente como longa, ou, finalmente, por meio de um ponto, •, se não visamos outra coisa senão a que dela se compõem a multidão; porém, de qualquer modo que se a represente e conceba, entenderemos sempre que é um sujeito extenso em toda forma e capaz de infinitas dimensões *[primo unilatem pingenius Iribus modis, nempe per quadratum, □, si attendamus ad illam ut longam et latam, vel per lineam,— , si consideremus tantum ut longam, vel denique per punctum, •, si non aliud spectemus quam quod ex illa componatur multitudo; at quocumque modo pingatur et concipiatur, intelligemus semper eamdem esse subjectum omnimode extensum et infinitarum dimensionum capax*]". Esta passagem ajuda a explicar o início da *Reg*. XVI, onde Descartes recomenda substituir as figuras inteiras por sinais muito curtos, *per brevissimas notas*. Esses signos não são necessariamente "figuras", como na passagem correspondente do *Discurso do método* (Cf. Hamelin: *Le Système de Descartes*, 1910, p. 68, n. 2); eles podem ser *pontos*.

[19] *Reg*. XIV, *AT*, X, p. 447.

70. — Esta generalização da noção de dimensão é o ponto capital do *Regulae*. Ela explica como a representação espacial pode adquirir um valor totalmente distinto de um simbolismo arbitrário e conduzir a uma ciência eficaz do universo. Com efeito, entre a diversidade de cores e a correspondente diversidade dos esquemas espaciais convencionada, não havia senão uma analogia exterior. As razões hipotéticas — que se encadeavam em teoria simplesmente porque o método insta supor "até mesmo da ordem entre [*os objetos*] que não se precedem naturalmente uns aos outros"[20], — eram adequadas mais para abranger do que para manifestar a verdadeira realidade dos fenômenos. A noção de dimensão generalizada permite substituir a analogia exterior pela resolução interna. Tratar um problema segundo a ordem da razão e segundo a natureza das coisas, como fez Descartes na descoberta fundamental das leis da refração, é reduzi-lo a um determinado número de dimensões elementares, é procurar as relações que correspondem a estas diversas dimensões e às suas relações recíprocas, até que o sistema destas relações seja incluído numa enumeração exaustiva, e se possa concluir da solução particular de cada uma das dificuldades à solução total do problema.

A reforma da filosofia pelas matemáticas será, então, realizada se o estudo de todos os fenômenos puder ser reduzido a medidas de dimensões. Tal objetivo, Descartes o alcançou reformulando a noção de *movimento*. Para Aristóteles, o movimento é o *ato de um ser em potência na medida em que é em potência*; sob esta definição geral, "os Filósofos" concebem "vários movimentos que eles acham que podem ser feitos sem que nenhum corpo mude de lugar, como aqueles que eles chamam de *motus ad formam*, *motus ad calorem*, *motus ad quantitatem*. E eu — continua Descartes no capítulo VII do *Mundo* —, não reconheço outro senão aquele… que faz com que os corpos passem de um lugar para outro e ocupem sucessivamente todos os espaços que estão entre os dois"[21]. A noção de tal movimento vem dentro da estrutura de noções geométricas; pode-se até dizer que está na base da geometria. "A natureza do movimento, do qual intento falar aqui, é tão fácil de conhecer que até mesmo os Geômetras, que entre todos os homens estudaram mais para conceber de maneira muito distinta as coisas que consideraram, julgaram-no mais simples e mais inteligível do que o de suas superfícies e linhas; como aparece no fato de que explicaram a linha pelo movimento de um ponto e a superfície pelo movimento de uma linha"[22]. Somente

[20] *AT*, VI, p. 18.
[21] *AT*, XI, p. 39.
[22] Ibid. Cf. Aristóteles, *de Anima*, 409a 4 (Ed. Rodier, t. 1, p. 44.) "(...) pois dizem que a linha movida forma a superfície; e o ponto, a linha". Ver também Proclus, *op. cit.*, p. 97: "una dizendo [que a linha] é um fluir do ponto"

as noções "de figuras, tamanhos e movimentos" constituem as "idéias claras e distintas que podem estar em nosso entendimento sobre as coisas materiais"[23]. A ciência do universo terá, portanto, de ser tratada unicamente em termos de *extensão* e *movimento*, seguindo "os princípios da Geometria e das Mecânicas"; — os princípios das *mecânicas* e os da Geometria são homogêneos, uma vez que a ideia de movimento não contém nenhum elemento que não esteja envolvido na ideia de espaço.

Esta é a forma da *matemática universal*, que o *mecanismo* cartesiano preencherá. A matéria é definida como o que se estende em comprimento, largura e profundidade[24]. Porém, as três dimensões não exaurem os elementos espaciais que podem ser combinados para explicar os fenômenos do universo. O movimento é uma grandeza suscetível de dimensão como a figura; a medida do movimento é adicionada à medida do volume para constituir as quantidades que entram nas equações fundamentais da mecânica. Se podemos, assim, por modificações de situação e de velocidade, dar conta de tudo "o que podemos perceber pela intervenção dos sentidos", e a "enumeração" dos nossos sentidos é "muito fácil", provamos por isso mesmo "que não há nada em todo este mundo visível, enquanto é apenas visível ou sensível, exceto as coisas [que foram] explicadas", e para concluir "que não há nenhum fenômeno na natureza para o qual a explicação seja omissa"[25].

e o texto da *Reg. XIV*, *AT*, X, p. 450: "o mesmo sucederá com o ponto dos geômetras, enquanto que de seu fluir compõem a linha [*idem erit cum puncto Geometrarum, dum ex ejus fluxu lineam componunt*]".

[23] *Pr. Phil*. IV, § 203, *AT*, VIII, (1), 326, et trad. franc., IX, (2), 321.

[24] "Revera extensio in longum, latum et profundum quae spatium constituit eadem plane est cum illa quae constituit corpus." *Principia Philosophiae* II, § 10, *AT*, VIII, (1), p. 45.

[25] Ibid., *IV*, § 199. *AT*, VIII, (1), p. 323, (2): tr. franc, t. IX, p. 317.