Sobre as mudanças na conceitografia: papel formal dos valores de verdade

On the changes in concept-script: the formal role of truth-values

10.21680/1983-2109.2022v29n59ID29630

Alessandro Bandeira Duarte
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ)
0000-0002-4011-5000
dedekind@ufrrj.br

Resumo: O objetivo do presente artigo é indicar a função que a distinção entre sentido e referência desempenha dentro da perspectiva logicista de Frege. Em particular, a partir da distinção, Frege busca introduzir os valores de verdade como objetos, os quais desempenham um papel central no sistema lógico das *Leis básicas da aritmética*.

Palavras-chave: Sentido e referência; Valores de verdade; Frege; Axioma IV; Teorema IVa

Abstract: The paper's aim is to discuss the role that the distinction between sense and meaning plays within Frege's logical perspective. In particular, with the distinction, Frege intents to introduce the truth-values as objects, which play a central role in the logical system of *Basic laws of arithmetic*.

Keywords: Sense and meaning; Truth-values; Frege; Axiom IV; Theorem IVa

1. INTRODUÇÃO

O objetivo do presente artigo é indicar a função que a distinção entre sentido e referência desempenha dentro da perspectiva logicista de Frege. Em particular, a partir da distinção, Frege busca introduzir os valores de verdade como objetos, os quais desempenham um papel central no sistema lógico das *Leis básicas da aritmética* (LBA). Esse fato é mencionado no prefácio de LBA (vol. 1):

> The old primitive signs that re-occur outwardly unaltered, and whose algorithm has hardly changed, have however been provided with different explanations. What was formerly the content-stroke reappears as the horizontal. These are consequences of a deep-reaching development in my logical views. Previously I distinguished two components in that whose external form is a declarative sentence: 1) acknowledgment of truth, 2) the content, which is acknowledged as true. The content I called judgeable content. This now splits for me into what I call thought and what I call truth-value. This is a consequence of the distinction between the sense and the reference of a sign. In this instance, the thought is the sense of a proposition and the truth-value is its reference. In addition, there is the acknowledgment that the truth-value is the True. For I distinguish two truth-values: the True and the False. I have justified this in more detail in my above mentioned essay Über Sinn und Bedeutung. Here, it might merely be mentioned that only in this way can indirect speech be accounted for correctly (FREGE, 2013, p. X).

Com intuito de entendermos melhor a passagem acima, é necessário, antes, compreendermos o sistema lógico desenvolvido entre 1879 e 1884. Esse será o tema da seção 2. Será visto que o sistema lógico de Frege não é completamente extensional. Além disso, a conceitografia[1] não é completa, uma vez que uma fórmula necessária ao sistema não pode ser derivada.

Na seção 3, discuto a conceitografia de LBA, mostrando como a introdução dos valores de verdade como objetos permite a inclusão do axioma IV no sistema, a partir do qual se segue o teorema IVa, cujo equivalente na linguagem da Conceitografia não é derivável.

2. SISTEMA LÓGICO DA CONCEITOGRAFIA E DOS FUNDAMENTOS DA ARITMÉTICA

2.1 A conceitografia em 1879

Como é bem conhecido, pelo menos até 1903, Frege defendeu o logicismo, tese segundo a qual a aritmética dos números naturais é redutível à lógica. No intuito de estabelecer rigorosamente essa tese, Frege percebeu a necessidade de criar uma linguagem artificial – denominada de conceitografia –, a partir da qual conceitos aritméticos pudessem ser logicamente definidos sem qualquer tipo de ambiguidade e provas de teoremas aritméticos pudessem ser estabelecidas sem a intrusão velada de qualquer elemento estranho à lógica. Dessa necessidade surgiu a publicação de seu primeiro livro, *Conceitografia*. Esse livro é dividido em três partes:

[1] Usaremos "conceitografia" para nomear o sistema lógico de Frege.

1. na primeira, Frege explica as noções lógicas primitivas e as regras de inferência, introduzindo seus respectivos símbolos. Além disso, há certas regras sintáticas implícitas que permitem produzir expressões complexas significativas a partir desses primitivos;

2. na segunda, os axiomas lógicos são apresentados e vários teoremas lógicos são derivados a partir desses axiomas junto com as regras de inferência;

3. na terceira, Frege introduz quatro definições de conceitos aritméticos referentes à teoria das sequências, a partir das quais teoremas matemáticos são derivados[2].

2.1.1 Os primitivos lógicos

O sistema lógico da *Conceitografia* é constituído dos seguintes símbolos lógicos primitivos:

a) letras latinas minúsculas: *a, b, c, d,...* cujo papel semântico é similar ao papel desempenhado na álgebra, a saber, o de expressar generalidade[3];

b) traço de juízo: $\vdash$, que tem o papel de transformar um termo em fórmula[4];

c) traço de conteúdo: $—$, cujo papel sintático é anexar-se a termos que expressam conteúdos conceituais asseríveis, formando novo termo[5];

d) traço condicional: $\sqsubset$, que funciona como implicação material[6];

e) traço de negação: $\top$, que funciona como a negação[7];

f) letras góticas: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ e $\mathfrak{F}$, que ocorrem junto com símbolo que expressa o quantificador universal[8];

g) quantificador universal: $\smile$[9];

h) identidade de conteúdo: $\equiv$[10].

2 Dentre esses teoremas os mais importantes são: fórmula 81 (indução matemática), fórmula 98 (transitividade do ancestral forte) e 133 (tricotomia induzida por uma relação funcional).
3 Cf. FREGE, 2019, §1.
4 Cf. FREGE, 2019,§2.
5 Cf. FREGE, 2019,§2.
6 Cf. FREGE, 2019, §5.
7 Cf. FREGE, 2019, §7.
8 CF. FREGE, 2019, §11.
9 CF. FREGE, 2019, §11.
10 CF. FREGE, 2019, §8.

Antes de continuarmos, algumas explicações são necessárias. A conceitografia é uma lógica de termos. Todo termo da conceitografia expressa um conteúdo conceitual, o qual pode ser de dois tipos:

i. conteúdo conceitual asserível;

ii. conteúdo conceitual não-asserível.

Antes de continuarmos, algumas explicações são necessárias. A conceitografia é uma lógica de termos. Todo termo da conceitografia expressa um conteúdo conceitual, o qual pode ser de dois tipos:

i. conteúdo conceitual asserível;

ii. conteúdo conceitual não-asserível.

iii. Na linguagem natural, conteúdos conceituais asseríveis seriam expressos por sentenças declarativas. Contudo, não é muito claro que tipo de entidade são os conteúdos conceituais asseríveis. Em §3 da *Conceitografia*, Frege parece estabelecer um critério de identidade para estas entidades: dois conteúdos conceituais asseríveis serão iguais se (?) e somente se eles tiverem o mesmo conjunto de consequências dentro de uma mesma teoria. Esse critério suscitou debate na literatura secundária. Por exemplo, Beaney (2007, p. 100) sustenta que o critério de identidade é dado por equivalência lógica. Rodrigues Filho (2007, p. 81-2) e Haddock (1986, p. 38-41; 2006, p. 6) rejeitam essa posição de Beaney, pois o critério implicaria que todos os teoremas da aritmética teriam o mesmo conteúdo conceitual asserível. De acordo com Rodrigues Filho (2007), no critério de identidade para conteúdos conceituais asseríveis, Frege teria uma outra noção de equivalência que seria mais forte que equivalência lógica e que evitaria tal consequência indesejável. Eu concordo com Rodrigues Filho e Haddock e penso que esse critério não pode ser dado por equivalência lógica. Todavia, diferentemente de Rodrigues Filho, defendo que Frege tinha em mente na §3 apenas a condição: dois conteúdos conceituais são iguais somente se eles têm o mesmo conjunto de consequências (dentro de uma mesma teoria). Essa condição é capturada pelo axioma 52 da *Conceitografia*[11].

De acordo com Makin (1994, p. 83), uma vez que os conteúdos conceituais asseríveis são portadores da verdade e ocorrem em cadeias referenciais, eles

11 Cf. DUARTE, 2009, cap. 2.

poderiam ser considerados como entidades próximas às proposições russellianas. Na visão Haddock (2006, p. 4-5), conteúdos conceituais asseríveis seriam uma sequência de símbolos à qual se poderia anexar o traço de conteúdo ou a combinação do traço de conteúdo e do traço de juízo. Na interpretação de Haddock, os conteúdos conceituais asseríveis seriam entidades linguísticas. Essa interpretação, contudo, tem o seguinte defeito: o que diferenciaria a expressão "casa", à qual não se poderia anexar o traço de conteúdo, da expressão "há casa", à qual se poderia anexar o traço de conteúdo? Em uma carta a Husserl (1980, p. 63), Frege afirma que conteúdo conceitual asserível é uma mescla de pensamento e valor de verdade, o que concorda, em certo sentido, com a posição de Makin. De fato, de acordo com a interpretação que defenderei aqui, conteúdos conceituais asseríveis são entidades intensionais. Isso acarretará que o sistema lógico da Conceitografia é igualmente intensional, uma vez que se pode produzir um termo bem-formado, usando-se a identidade de conteúdo flanqueada por símbolos que expressam conteúdos conceituais asseríveis[12]

Conteúdos conceituais não-asseríveis seriam expressos por termos singulares como "2" ou "1+1". Essa distinção será importante quando chegarmos na aplicação sintática do traço de conteúdo.

Na *Conceitografia*, Frege rejeita a análise de sentenças em termos de sujeito e predicado[13]. Na visão dele, a análise correta é em termos de função e argumento[14] e uma mesma sentença pode ter mais de uma análise[15]. Contudo, tais análises não modificam o conteúdo conceitual asserível expresso[16].

Há uma ambiguidade em relação às letras latinas. Às vezes elas percorrem conteúdos conceituais asseríveis,[17] às vezes elas podem percorrer conteúdos conceituais asseríveis ou conteúdos conceituais não-asseríveis[18] [19] e às vezes elas são usadas como expressando funções[20] [21].

---

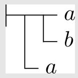
[12] No prefácio da *Conceitografia*, Frege afirma que a fórmula $\vdash (\top\!\top\, a \equiv a)$ poderia ser introduzida no sistema como um axioma. Como veremos, o termo $\top\!\top\, a$ expressa um conteúdo conceitual asserível. Nesse caso, o termo "a" deve também ser conteúdo conceitual asserível. Além disso, as definições da parte 3 da Conceitografia são identidades flanqueadas por símbolos que expressam conteúdos conceituais asseríveis.

13 Cf. FREGE, 2019, §3.

14 Cf. FREGE, 2019, §9.

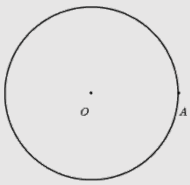
15 Cf. FREGE, 2019, §9.

16 Implicitamente, Frege também analisa termos singulares complexos em vista de função e argumento: "*Se, em uma expressão,* ***cujo conteúdo não precisa ser asserível,*** *um sinal simples ou composto ocorre em um ou mais lugares, e se o pensarmos como substituível por outro [sinal], mas sempre substituível pela mesma expressão em todos os lugares ou em algum desses lugares, então chamamos de função a parte invariante da expressão e chamamos de argumentos a parte substituível*" (FREGE, 2019, p. 55, meu grifo).

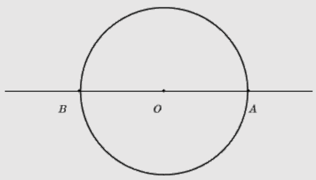
[17] Isso é certamente o caso de "*a*" e "*b*"na fórmula  . Mais para frente veremos as regras sintáticas.

18 As letras "*c*" e "d" ora são usadas como percorrendo conteúdos conceituais asseríveis (veja fórmula 2 da *Conceitografia*), ora podem ser usadas como percorrendo conteúdos conceituais não-asseríveis ou asseríveis

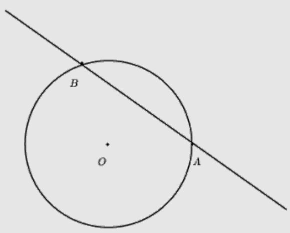
Outro ponto bastante controverso diz respeito à identidade de conteúdo. Frege parece dar uma interpretação metalinguística a esse símbolo, assumindo que ele relaciona nomes para conteúdos conceituais. O ponto dele parece ser o seguinte: se a identidade de conteúdo relacionasse os próprios conteúdos conceituais, então toda identidade verdadeira expressaria a autoidentidade, de forma que elas seriam necessariamente verdadeiras (analíticas). Todavia, de acordo com Frege, tal resultado é insatisfatório, pois algumas identidades são sintéticas.[22] Frege apresenta um exemplo em que o mesmo ponto pode ser determinado de formas distintas. Sejam um círculo qualquer de centro O e um ponto fixo A na circunferência desse círculo, conforme a figura abaixo:



Seja uma reta que passe pelos pontos A e O, chegando no lado oposto da circunferência, produzindo o ponto B, de acordo com a próxima figura:



Agora, pense nessa reta movimentando-se, mas mantendo o ponto A fixo. Cada ponto de interseção entre a reta e a circunferência será chamado de ponto B. Exemplo:



(fórmulas 52, 54, 57, 58). De fato, veremos que as fórmulas 52, 54 e 57 têm uma interpretação "proposicional" também.

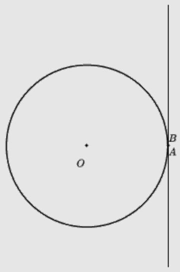
19 Em geral, "*x*", "*y*" e "*z*" parecem ser usadas como percorrendo conteúdos conceituais não-asseríveis.

20 Na fórmula 22, "*f*" percorre claramente conteúdos asseríveis. Por outro lado, na fórmula 58, "*f*" percorre funções unárias. Em várias fórmulas da terceira parte, "*f*" percorre funções binárias. Em geral, as letras "*g*", "*h*" e "*F*" são usadas como percorrendo funções unárias.

21 A introdução do horizontal dissipará tal ambiguidade. Isso será visto mais para frente.

22 "Disso se segue que os nomes diferentes para o mesmo conteúdo nem sempre são uma mera questão irrelevante de forma; pelo contrário, eles atingem a própria essência da coisa, quando eles estão associados a modos diferentes de determinação [do conteúdo]. Neste caso, o juízo que tem por objeto a identidade de conteúdo é sintético, no sentido kantiano" (FREGE, 2019, p. 52-53).

Quando essa reta é tangente à circunferência passando pelo ponto A, o ponto B é determinado pela descrição “ponto que corresponde à linha perpendicular ao diâmetro”.



Nesse caso, temos que o ponto *A* é o mesmo que o ponto *B*. Esses dois nomes distintos determinam dois modos de determinação do mesmo conteúdo[23]. Uma vez que Frege tem apenas uma entidade semântica na *Conceitografia* – os conteúdos conceituais –, ele foi obrigado a estipular que “$\equiv$” relaciona nomes, sendo que nomes diferentes podem[24] designar modos distintos de determinação do conteúdo, o que explicaria a diferença cognitiva entre “$a \equiv a$” e “$a \equiv b$”.

2.1.2 Regras de boa-formação e de inferência

Não há na *Conceitografia* qualquer regra explícita de boa-formação de expressões. Contudo, é possível determinar certas regras que são usadas na parte 1 do livro. Em relação às regras de inferência, Frege sustenta a posição segundo a qual a única regra de inferência do sistema é o *modus ponens* (MP)[25]. Todavia, como será visto, Frege faz uso de outras regras distintas de MP.

Apresento agora as regras sintáticas de boa-formação:

(1) as letras latinas são termos[26] (exceto aquelas que, no contexto, designam funções em geral);

(2) Se Φ^n expressa uma função n-ária e $\delta_1, \ldots, \delta_n$ são termos, então $\Phi(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ é um termo;

---

23 Cf. FREGE, 2019, §8. No seguinte link, há uma animação da situação apresentada por Frege: https://www.geogebra.org/m/sejvbe7u .
24 Nas definições, tanto o *definiendum* como o *definiens* são nomeados por diferentes nomes. Contudo, por estipulação, afirma-se que esses nomes são sinônimos.
25 Cf. FREGE, 2019, §6.
26 Os termos expressam conteúdos conceituais.

(3) Se δ_1, δ_2 são termos, então $(\delta_1 \equiv \delta_2)$ é um termo que expressa um conteúdo conceitual asserível;

(4) Se Δ_1, Δ_2 são termos que expressam conteúdos conceituais asseríveis, então $—\, \Delta_1$,[27] $\begin{array}{l} \top\!\!-\, \Delta_2 \\ \llcorner\, \Delta_1 \end{array}$[28], $\top\!\!-\, \Delta_1$ serão termos que expressam conteúdos conceituais asseríveis[29];

(5) Se $—\, \Phi(\delta)$ é um termo, então $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\, \Phi(\mathfrak{a})$ é um termo que expressa um conteúdo asserível;

(6) Se $—\, M_\alpha\Phi(\alpha)$ é um termo, então $\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\!\!-\, M_\alpha\mathfrak{F}(\alpha)$ é um termo que expressa um conteúdo asserível[30];

(7) Nada mais é termo

(8) Uma fórmula é obtida adicionando-se o traço de juízo a termos da forma $—\, \Delta$: $\vdash \Delta$[31]

As regras de inferências são:

(MP) De $\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\, \Delta_2 \\ \quad\llcorner\, \Delta_1 \end{array}$ e $\vdash \Delta_1$, inferir $\vdash \Delta_2$.

(GU) De $\vdash \Phi(\delta)$, inferir $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\, \Phi(\mathfrak{a})$ (generalização universal)

(Conf) de $\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\, \Phi(\delta) \\ \quad\llcorner\, \Delta \end{array}$, em que δ não ocorre em Δ, inferir $\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\, \Phi(\mathfrak{a}) \\ \quad\llcorner\, \Delta \end{array}$ (confinamento da generalidade ao consequente).

(Sub 1) Qualquer substituição uniforme de conteúdos conceituais asseríveis por outros conteúdos conceituais asseríveis em uma fórmula produz uma nova fórmula. Exemplo: seja a fórmula $\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\!\!-\, a \\ \quad\;\;\llcorner\, b \\ \quad\llcorner\, a \end{array}$

---

[27] "Nem todo conteúdo pode tornar-se um juízo, mesmo quando $\vdash$ antecede a seu sinal; a ideia de "casa", por exemplo, não se torna. Por esta razão, distinguimos entre conteúdos asseríveis e não-asseríveis. [...] O que quer que se siga o traço de conteúdo deve sempre ser um conteúdo asserível" (FREGE, 2019, p. 36).

28 "Se *A* e *B* significam conteúdos asseríveis, então surgem as seguintes quatro possibilidades:

1. *A* é afirmado e *B* é afirmado
2. *A* é afirmado e *B* é negado
3. *A* é negado e *B* é afirmado
4. *A* é negado e *B* é negado

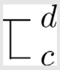
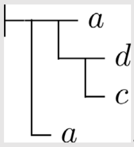
Agora, $\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\, A \\ \quad\llcorner\, B \end{array}$

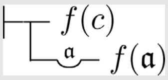
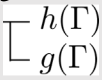
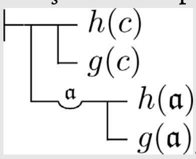
significa o juízo de que a terceira dessas possibilidades não ocorre, mas as outras três sim" (FREGE, 2019, p. 30-40).

29 As regras de Frege não são puramente sintáticas.

30 *M* expressa uma função de segunda ordem.

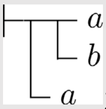
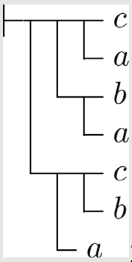
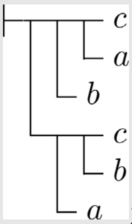
31 Landini (2012, p. 47-48) apresenta regras similares.

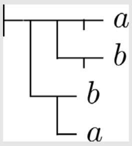
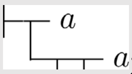
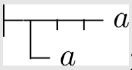
(axioma 1 da *Conceitografia*). Substituindo-se uniformemente b por  nessa fórmula, obtemos a seguinte nova fórmula .

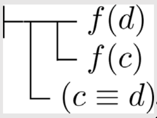
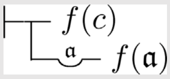
(Sub 2) Qualquer substituição uniforme de uma função por outras funções em uma fórmula produz uma nova fórmula. Exemplo: seja a fórmula  (axioma 58 da *Conceitografia*). Substituindo-se uniformemente a função $f(\Gamma)$ pela função  nessa fórmula, obtemos a fórmula .

2.1.3 Axiomas da *Conceitografia*

Na parte 2 da *Conceitografia,* Frege estabelece 9 axiomas, a saber:

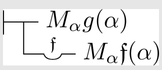
Fórmula 1: ; Fórmula 2: ; Fórmula 8: ;

Fórmula 28:  Fórmula 31: ; Fórmula 41: ;

Fórmula 52: ; Fórmula 54: $\vdash (c \equiv c)$; Fórmula 58: 

Na literatura secundária, estes axiomas são divididos da seguinte forma: 1), 2), 8), 28), 31), 41) formam o sistema proposicional Fregeano. A adição de 52), 54) e 58) produzem o sistema axiomático da lógica de primeira ordem com identidade[32]. Contudo, na lógica de termos de Frege, tal divisão seria irrelevante.

---

32 Na parte 3 da *Conceitografia*, Frege faz certas substituições no axioma 58, transformando-o em uma versão de segunda ordem, que poderia ser formulado da seguinte forma: 

De fato, o axioma 52 e o axioma 54 podem ter uma interpretação proposicional. Além disso, o teorema 57

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\!\!\top\; f(c) \\ \quad\;\;\llcorner\; f(d) \\ \quad \llcorner\; (c \equiv d) \end{array}$$

também tem uma interpretação proposicional. Há pelo menos duas evidências que corroboram com a minha afirmação. A primeira está relacionada com uma afirmação feita por Frege no prefácio da Conceitografia

> Já observei que as fórmulas (31) e (41) podem ser reduzidas a uma única fórmula
>
> $$\vdash (\top\!\!\top\; a \equiv a)$$
>
> com a qual são possíveis outras simplificações (FREGE, 2019, p. 31).

Na passagem, Frege sugere que a fórmula $\vdash (\top\!\!\top\; a \equiv a)$ poderia ser adicionada como um axioma no sistema e que esta inclusão produziria uma simplificação no sistema axiomático. A interpretação mais plausível é que desta fórmula os axiomas 31 e 41 seriam derivados. Se isso é o caso, então a identidade de conteúdo funcionaria como uma espécie de equivalência[33].

O ponto é: como 31 e 41 seriam derivadas no sistema? Minha sugestão é a seguinte: 31 e 41 são derivadas, usando-se o axioma 52 e o teorema 57. Nesse caso, essas fórmulas têm uma interpretação proposicional. A derivação é como se segue. Assuma

$$\text{i)}\vdash (\top\!\!\top\; a \equiv a)$$

Usando a regra (Sub 1) na fórmula 52, obtemos a seguinte fórmula:

$$\text{ii)}\;\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\!\!\top\; f(a) \\ \quad\;\;\llcorner\; f(\top\!\!\top\; a) \\ \quad \llcorner\; (\top\!\!\top\; a \equiv a) \end{array}$$ [34]

Usando a regra (Sub 2) na fórmula ii), obtemos:

$$\text{iii)}\;\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\!\!\top\; a \\ \quad\;\;\llcorner\top\!\!\top\; a \\ \quad \llcorner\; (\top\!\!\top\; a \equiv a) \end{array}$$

A substituição da função foi a seguinte: a função $f(\Gamma)$ é substituída pela função Γ[35]. De i) e iii), aplicando-se MP, obtemos a fórmula 31[36].

---

33 Chateaubriand (2001, p. 270) afirma que a identidade de conteúdo em $\vdash (\top\!\!\top\; a \equiv a)$ expressaria a equivalência lógica.

34 Aqui substituímos *c* por $\top\!\!\top\; a$ e *d* por *a*.

35 Essa função é uma espécie de função identidade, em que o valor da função para um certo argumento é o próprio argumento. Em LBA, essa função será substituída pela função dada pelo horizontal.

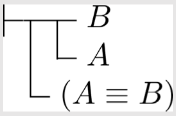
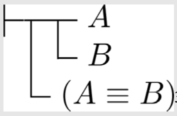
36 A fórmula 41 é obtida de forma semelhante a partir da fórmula 57.

A segunda evidência tem a ver com as definições da *Conceitografia*. As definições na parte 3 têm a seguinte forma

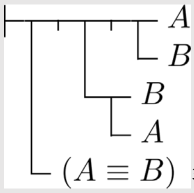
$$\Vdash (A \equiv B).$$

A é o *definiens* e *B* é o *definiendum*. $\Vdash$ indica que, por estipulação, *A* tem o mesmo conteúdo conceitual que *B*. De acordo com Frege, as definições são transformadas em uma espécie de axioma: $\vdash (A \equiv B)$. Depois, usando o axioma 52 e o teorema 57 e (Sub 2), Frege obtém o seguinte, respectivamente:  e . Novamente, nas definições, a identidade de conteúdo funciona como uma espécie de equivalência.

Na *Conceitografia,* as seguintes fórmulas são deriváveis a partir do axioma 52 e do teorema 57, substituindo-se a função $f(\Gamma)$ por Γ:

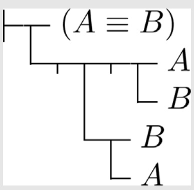
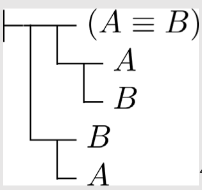
52*)  57*) [37]

Obviamente, *A* e *B* devem ser conteúdos conceituais asseríveis[38]. E de 52* e 57*, poderia ser obtida a fórmula

(*) [39].

Isso corrobora a afirmação de que a identidade de conteúdo parece funcionar como uma espécie de equivalência em certos casos. Além disso, podemos interpretar o axioma 52 e o teorema 57 como instâncias da condição segundo a qual se dois conteúdos conceituais asseríveis são idênticos, então eles têm o mesmo conjunto de consequências (dentro de uma mesma teoria).

Contudo, a inversa da fórmula (*), a saber,

(**)  ou [40]

37 Cf. DUARTE, 2009 e KIMBERLY HECK; MAY, 2020.
38 Em Duarte (2014), apontei um problema relacionado com a regra de substituição para funções que não teria uma aplicação universal no sistema lógico de 1879 e 1884. Com as mudanças na conceitografia em LBA, (Sub 2) tornou-se universalmente válida.
39 Tradução: $(A \equiv B) \supset ((A \supset B) \& (B \supset A))$

não é derivável no sistema da *Conceitografia*[41].

Iremos ver que, nos *Fundamentos da aritmética* (§ 73), a fórmula (**) parece ser pressuposta no esboço de prova do Princípio de Hume a partir da definição explícita do operador-cardinalidade em termos de extensão de conceitos.

2.2 O sistema lógico dos *Fundamentos da aritmética*

No prefácio da *Conceitografia*, Frege apresenta a futura direção de suas pesquisas

> Como disse no início, a aritmética foi o ponto de partida do processo intelectual que me conduziu a minha conceitografia. A esta ciência, portanto, pensei aplicá-la de início, procurando analisar mais detidamente seus conceitos e fundamentar de modo mais aprofundado suas proposições. Por enquanto, no terceiro capítulo [da *Conceitografia*], desenvolvo algo que aponta para essa direção. O prosseguimento da rota indicada — a elucidação dos conceitos de número, grandeza, etc. — será objeto de outras investigações que virão a lume após este livro.

Em 1884, Frege publicou *Os fundamentos da aritmética*, no qual trata justamente da elucidação do conceito de número cardinal. Contudo, antes de entrar na discussão sobre *Os fundamentos*, gostaria de analisar uma carta que Frege enviou a Marty em 1882[42] e uma missiva dessa carta, pois elas podem esclarecer – ou melhor, obscurecer – a interpretação do livro de 1884.

Na carta enviada em 1882, Frege afirma que estava próximo de terminar um livro no qual ele tinha discutido sobre o conceito de número cardinal e derivado os princípios da aritmética por meios puramente lógicos[43]. O pensamento imediato é que Frege se refere aos *Fundamentos*. Contudo, a carta enviada a Marty tinha o objetivo de convencê-lo a escrever uma resenha sobre a *Conceitografia*, pois, de acordo com Frege, isso chamaria a atenção para sua notação lógica. Na carta, Frege deixa claro que o livro fora escrito na conceitografia[44]. Assim, a carta de Frege a Marty em 1882 sugere que o tal livro mencionado não é os *Fundamentos*. Além disso, é muito provável que o sistema lógico contido nesse livro é muito próximo do sistema lógico da *Conceitografia,* que foi apresentado na seção 2.1.

---

40 Tradução: $((A \supset B)\&(B \supset A)) \supset (A \equiv B)$

41 Quem primeiro chamou minha atenção para esse ponto foi Chateaubriand (2001, cap. 8). Landini (1996) também aponta para esse fato. Em Duarte (2009, apêndice 1), apresento uma prova de independência de (**). San Millán (2015, cap. 4) apresenta uma nova prova de independência de (**).

42 A carta é datada de 29 de agosto de 1882.

43 Cf. FREGE, 1980, p. 99.

44 Cf. FREGE, 1980, p. 102.

Cerca de 10 dias depois, Frege recebeu uma missiva da carta enviada a Marty cujo remetente é Carl Stumpf[45]. Nessa missiva, é sugerido que Frege publicasse um livro introdutório ao livro mencionado na carta na linguagem ordinária, pois isso facilitaria o entendimento de um público mais amplo, o que ajudaria a publicação do livro com teor mais técnico[46]. As duas cartas sugerem a seguinte interpretação: o livro *Os fundamentos da aritmética* seria uma espécie de introdução, prolegômeno ao livro técnico de 1882. Esse ponto será relevante para a discussão a seguir[47].

2.2.1 Quebra-cabeça

Um dos objetivos de Frege *nos Fundamentos* é definir o conceito de número cardinal (*Anzahl*), a partir do qual os princípios da aritmética seriam derivados. *Nos Fundamentos*, Frege apresentou três definições, sendo as duas primeiras descartadas. Aqui não discutirei a primeira definição[48]. A segunda definição ocorre nas seções 62-63 dos *Fundamentos*. De acordo com Frege, os números cardinais são objetos e poderiam ser introduzidos por meio da seguinte definição contextual:

(Princípio de Hume) $N_x F(x) \equiv N_x G(x). \equiv .F1-1G$[49].

Aqui, "$N_x \ldots x \ldots$" é o operador-cardinalidade *o número de* e "$\ldots 1-1 \ldots$" expressa a relação de correspondência 1-1 entre conceitos.

Como é bem conhecido, Frege rejeitou o Princípio de Hume como definição por causa do Problema de Júlio César. De acordo com ele, o Princípio de Hume não consegue decidir o valor de verdade de identidades do tipo

$$N_x F(x) \equiv q,$$

quando *q* não é dado na forma $N_x \ldots x \ldots$.

Na seção 68 dos *Fundamentos*, Frege apresenta a terceira e última definição de número cardinal em termos das extensões de conceito:

(Explícita): $N_x F(x) \equiv \mathrm{Ext}_X(X1-1F)$[50].

---

45 A carta é datada de 9 de setembro de 1882. Não se sabe exatamente por que a missiva está em nome de Stumpf. A edição alemã apresenta algumas conjecturas. Cf. FREGE, 1976, p. 256.
46 Cf. FREGE, 1980, p. 171-2.
47 Não é objetivo desse artigo apresentar uma interpretação geral *dos Fundamentos*. Desejo apresentar apenas um dos quebra-cabeças que ocorre nesse livro.
48 Essa definição ocorre nas seções 55 e 56 dos *Fundamentos*.
49 Em palavras: *o número de F tem o mesmo conteúdo que o número de G* é *gleichbedeutend* a *os conceitos F e G estão em uma correspondência 1-1*.
50 Em palavras: o número de *F* é a extensão do conceito e*star em correspondência 1-1 com F*. Há um debate na literatura secundária em relação à definição explícita. Ruffino (1996, 2000) e Landini (2006, 2012) defendem que a definição dos *Fundamentos* é similar à definição das Leis Básicas, uma vez que eles sustentam a tese da identificação das expressões "*o conceito f*" e "*a extensão do conceito f*". Schirn (1990) rejeita a tese da identificação e Blanchete (1994) afirma a definição em termos de extensões de conceito de segunda ordem.

Na seção 73, Frege esboça uma prova do Princípio de Hume a partir da definição explícita. É aqui que temos um quebra-cabeça. Em primeiro lugar, a prova parece depender de alguma versão do axioma V que rege a introdução das extensões. Contudo, em nenhum momento tal versão é mencionada. Além disso, na seção 107 dos *Fundamentos*, Frege afirma que não atribui qualquer importância à introdução das extensões de conceito, que é um fato surpreendente se levarmos em conta que os *Fundamentos* é uma espécie de introdução ao livro mencionado na carta de 1882. Na conceitografia de 1879 não há qualquer axioma que rege as extensões. Se Frege tivesse adicionado um novo axioma em 1882, ele teria de ter informado o fato nos *Fundamentos*. Portanto, sou extremamente cético se Frege tinha o axioma V no sistema lógico de 1884.

Todavia, não é esse o quebra-cabeça central. Se tentarmos reconstruir a prova de Frege que ocorre na seção §73, logo observamos que a prova dependeria da fórmula (**), a qual não é derivável no sistema lógico de 1879. Assuma que Frege tivesse a seguinte versão do axioma V:

(Axioma V) $\mathrm{Ext}_Z M(Z) \equiv \mathrm{Ext}_Z N(Z). \equiv . \overset{\mathfrak{f}}{\smile} (M_\alpha \mathfrak{f}(\alpha) \equiv N_\alpha \mathfrak{f}(\alpha))$.

Em §73 dos *Fundamentos*, Frege esboçou a prova dos teoremas 1 e 2 abaixo:

(Teorema 1) $N_x F(x) \equiv N_x G(x). \supset .F1-1G$

Esboço de prova: assuma que $N_x F(x) \equiv N_x G(x)$. Aplique a definição explícita. Assim, temos: $\mathrm{Ext}_Z(Z1-1F) \equiv \mathrm{Ext}_Z(Z1-1G)$. Pelo suposto axioma V, obtemos $\overset{\mathfrak{f}}{\smile} (\mathfrak{f}1-1F \equiv \mathfrak{f}1-1G)$. Instanciando universalmente, chegamos a $H1-1F \equiv H1-1G$. Daí não é difícil derivar $F1-1G$, uma vez que $N_x F(x) \equiv N_x G(x). \supset .F1-1G$ é uma relação de equivalência. O problema encontra-se na volta.

(Teorema 2) $F1-1G \supset N_x F(x) \equiv N_x G(x)$

No esboço de prova de Frege, ele diz que devemos assumir que $F1-1G$. A prova ocorre em duas etapas: 1) devemos assumir primeiro que $H1-1F$ e derivar que $H1-1G$, sendo H arbitrário; 2) devemos assumir depois que $H1-1G$ e derivar $H1-1F$, sendo novamente H arbitrário.

A prova de 1) e 2) não são difíceis, uma vez que $...1-1...$ é uma relação de equivalência. A prova de 1) se dá assumindo que $H1-1F$ e $F1-1G$. Assim, por construção da relação composta, segue-se que $H1-1G$. Assim, temos: (a) $H1-1F \supset H1-1G$.

A prova de 2) é similar. Assuma $H1-1G$ e $F1-1G$. Uma vez que $F1-1G$, então a relação inversa produz $G1-1F$. E de $H1-1G$ e $G1-1F$,

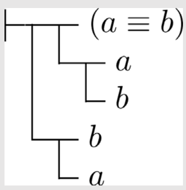
Para a nossa discussão aqui, é irrelevante se a definição é em termos de extensões de conceito de primeira ordem ou em termos de extensões de conceito de segunda ordem.

por meio da construção da relação composta, obtemos $H1-1F$. Assim, temos: (b) $H1-1G \supset H1-1F$.

O esboço de Frege termina aqui. Mas note que a prova não está completa. Frege teria de obter o lado direito do suposto axioma V. Isso significa que de (a) e (b) Frege teria de derivar $H1-1G$, a partir da qual seria obtida fórmula $\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!-(\mathfrak{f}1-1F \equiv \mathfrak{f}1-1G)$ por generalização universal. Daí ele obteria o lado esquerdo do axioma V: $F1-1G \supset N_xF(x) \equiv N_xG(x)$. Aplicando a definição de número, Frege obteria $F1-1G$.

Mas a obtenção de $H1-1G$ a partir de (a) e (b) depende da fórmula (**), que é independente dos axiomas do sistema lógico de 1879. Uma possível resposta poderia ser a seguinte: Frege incluiu a fórmula (**) no sistema lógico de 1882 como novo axioma ou incluiu alguma outra fórmula a partir da qual a fórmula (**) seria derivada.

Essa resposta é insatisfatória pela seguinte razão: a fórmula (**) é falsa ou amplamente discutível na interpretação semântica de Frege. Nos *Fundamentos*, as sentenças ainda expressam conteúdos conceituais asseríveis, que são entidades intensionais próximas às proposições. Portanto, a inclusão da fórmula (**) no sistema lógico implicaria que todos os teoremas da conceitografia expressariam o mesmo conteúdo conceitual asserível (mesma proposição). Esse resultado é simples de demonstrar. Suponha que

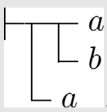
(Fórmula **) 

foi adicionada como axioma (ou é um teorema). Sejam *A* e *B* quaisquer fórmulas da conceitografia:

(i) $\vdash A$

(ii) $\vdash B$.

Além disso, temos o axioma 1

(Axioma 1) .

Com substituições uniformes para conteúdos conceituais asseríveis no axioma 1, (i), (ii) e MP, obtemos

(i*)  e (ii*) .

E de (i*) e (ii*), juntamente como a fórmula (**), obtemos $\vdash (A \equiv B)$ via MP. Esse resultado é inaceitável para Frege[51].

O quebra-cabeça, enfim, é: como Frege derivou os princípios da aritmética no livro mencionado na carta de 1882? Uma interpretação padrão seria que ele fez algo similar ao que foi feito nos *Fundamentos* em 1884, a saber, Frege derivou o Princípio de Hume a partir da definição explícita e os princípios da aritmética foram derivados com auxílio apenas do Princípio de Hume. Como mostrei, essa interpretação é, no mínimo, duvidosa. Em Duarte (2009), defendi a hipótese de que no livro mencionado na carta de 1882 Frege tivesse considerado o Princípio de Hume como primitivo no sistema. De fato, todos os teoremas mencionados nos *Fundamentos* (§§72-83) são deriváveis na teoria obtida a partir do sistema lógico de 1879 juntamente com a inclusão do Princípio de Hume e das definições do número zero, do número um e da relação de predecessor[52] [53].

3. SISTEMA LÓGICO DAS *LEIS BÁSICAS DA ARITMÉTICA*

Na seção 2, apresentei o sistema lógico da *Conceitografia* e assumi que este sistema lógico estava na base do livro mencionado na carta de 1882 e dos *Fundamentos*. Como observei, esse sistema tem uma interpretação intensional devido aos conteúdos conceituais asseríveis, que se assemelham a proposições. Além disso, as regras sintáticas de Frege permitem que nomes para conteúdos conceituais asseríveis flanqueiem o símbolo para identidade de conteúdo, cuja interpretação semântica também é intensional.

Na introdução, citei uma passagem de Frege na qual ele apresenta um conjunto mínimo de mudanças na conceitografia, que terão um enorme impacto no sistema lógico das *Leis básicas*. O cerne dessas mudanças encontra-se na distinção entre sentido e referência de uma expressão. No sistema lógico de 1879-1884, Frege tinha apenas uma entidade semântica no seu sistema: os conteúdos conceituais. Agora os conteúdos conceituais são divididos em duas entidades semânticas: de um lado o objeto referido por uma expressão, de outro o sentido.

Na lógica das *Leis básicas*, os termos referem-se a objetos. Há uma disputa interpretativa, mas podemos considerar que os termos que ocorrem nas *Leis básicas* referem-se a percurso de valores e valores de verdade. Com a introdução de valores de verdade, o sistema lógico de Frege torna-se extensional. Com isso, uma fórmula similar à fórmula (**) – teorema IVa – é deduzida no sistema, a

---

51 Cf. FREGE, 1984, p. 240-1.
52 Cf. DUARTE, 2009, cap. 4.
53 Landini (2012, cap. 4) propõe uma saída interpretativa para o quebra-cabeça. Infelizmente, por falta de espaço, não discutirei a proposta dele aqui. Deixarei essa discussão para um próximo artigo.

qual é usada na derivação de um teorema similar ao teorema 2 acima[54]. A derivação do teorema IVa é devido à introdução de um novo axioma no sistema, o axioma IV.

3.1 Os primitivos lógicos das Leis básicas

Em termos de primitivos lógicos, as mudanças não são significativas, sendo a única mudança a substituição de “$\equiv$” por “=”:

1. Letras latinas: $a, b, c, d, \ldots$;
2. Letras funcionais: f, g, F;
3. Horizontal: $—$;
4. Traço de juízo: $\vdash$
5. Traço condicional: $\sqsubset$;
6. Traço de negação: $\top\!\!—$
7. Letras góticas: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ e $\mathfrak{F}$;
8. Quantificador universal: $\smile\!\!—$;
9. Identidade: =

Contudo, em termos semânticos, as mudanças são drásticas. Agora o horizontal se refere a um conceito, cuja estipulação semântica é:

$$— \Delta = \begin{cases} \mathrm{V}, & \text{se } \Delta = \mathrm{V} \\ \mathrm{F}, & \text{se } \Delta \neq \mathrm{V} \end{cases}$$

O horizontal pode ser aplicado a qualquer termo do sistema para produzir um novo termo, que será sempre um nome de um valor de verdade. Assim,

“$— 2$”

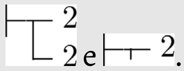
é bem-formada no sistema das *Leis básicas* e refere-se ao Falso, uma vez que 2 não é o Verdadeiro.

A nova interpretação do horizontal tem consequências para a interpretação do traço condicional e do traço de negação, que se tornam funções de verdade (conceitos). Além disso, não há mais quaisquer restrições na aplicação desses símbolos aos termos do sistema. Por exemplo,

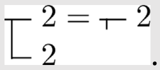
“$\begin{array}{l} \sqsubset\!\!— 2 \\ \;\;\;— 2 \end{array}$” e “$\top\!\!— 2$”

são expressões bem-formadas que se referem ao Verdadeiro. E, portanto, poderiam ser afirmadas

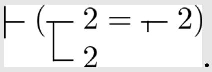
54 Cf. FREGE, 2013, p. 85.



Termos que se referem a valores de verdade podem ocorrer flanqueando o símbolo de identidade. Por exemplo,

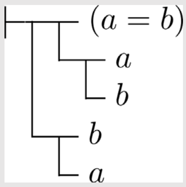


Como ambos os termos têm a mesma referência – o Verdadeiro –, essa fórmula refere-se igualmente ao Verdadeiro e, portanto, pode ser afirmada:

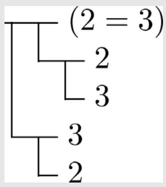


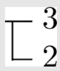
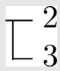
Desse modo, quaisquer dois termos que se referem ao mesmo valor de verdade, mesmo que expressem sentidos distintos, podem ser colocados em uma identidade, a qual se referirá ao Verdadeiro[55].

Dentro do contexto das *Leis básicas*, uma versão similar à fórmula (**)

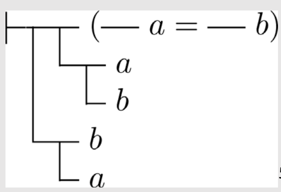
(#) 

é quase plausível. Se *a* e *b* se referem a valores de verdade, então a fórmula (#) é verdadeira. Contudo, ela falha quando ou *a* ou *b* (ou ambos) não se referem a valores de verdade. Por exemplo, a seguinte instância da fórmula (#)

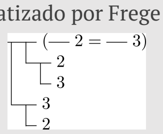


é falsa, uma vez que  e  se referem ao verdadeiro e $2 = 3$ se refere ao Falso.

Esse problema é superado afirmando a identidade em termos de valores de verdade da seguinte forma:

(Teorema IVa)  [56]

55 Esse ponto é enfatizado por Frege em um artigo no qual ele discute o sistema lógico de Peano. Veja nota 52.

56 Assim a fórmula 

Frege poderia ter incluído IVa no sistema lógico como um novo axioma, contudo, em vez disso, ele introduz no sistema o axioma IV:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\; (-\!\!-\; a) = (-\!\!-\; b) \\ \quad \llcorner\!\top\; (-\!\!-\; a) = (\top\!\!-\; b) \end{array}.$$

O axioma afirma a existência de exatamente dois valores de verdade. Assim, ou o valor de verdade de $-\!\!-\; a$ é o mesmo que o de $\top\!\!-\; b$ ou o valor de verdade de $-\!\!-\; a$ é o mesmo que o de [57].

O axioma IV parece afirmar uma intuição mais simples e óbvia que o teorema IVa. Além disso, a introdução do axioma IV parece simplificar o sistema, pois dele se segue, além do teorema IVa, o teorema IVb

(Teorema IVb): $\vdash (-\!\!-\; a) = (\top\!\top\!-\; a)$,

a partir do qual Frege deriva fórmulas similares aos axiomas 31 e 41 da *Conceitografia*, seguindo as provas que indiquei anteriormente na seção 2.

É possível conjecturar que as mudanças na conceitografia tenham sido motivadas pela busca da prova do Princípio de Hume a partir da definição explícita do operador cardinalidade. É bastante plausível assumir que Frege não tinha uma prova formal em 1884, o que indica que ele provou os princípios da aritmética por outros meios em 1882. Quando ele tentou executar a prova que ele indicou nos *Fundamentos*, ele percebeu a necessidade de uma fórmula como (**). Contudo, a introdução da fórmula não era possível no sistema intensional de 1879-1884. As mudanças na conceitografia, alavancadas principalmente com a distinção de sentido e referência de uma expressão e com a introdução dos valores de verdade como objetos, tornaram o sistema extensional, possibilitando o caminho para prova do Princípio de Hume[58].

4. CONCLUSÃO

O objetivo do artigo era indicar que a distinção entre sentido e referência e a introdução dos valores de verdade como objetos desempenharam um papel central na lógica de Frege e no projeto logicista. Para esse fim, apresentei o sistema lógico da *Conceitografia* e dos *Fundamentos*. Argumentei que o sistema nesse período era intensional, devido aos conteúdos conceituais asseríveis que

---

refere-se ao Verdadeiro, pois o valor de verdade de $-\!\!-\; 2$ é o mesmo que o de $-\!\!-\; 3$

57 Note que no sistema lógico da *Conceitografia* o axioma IV não valeria. Se *A* e *B* são termos que expressam conteúdos conceituais asseríveis, não é o caso que ou $A \equiv B$ ou $A \equiv \top\!\!-\; B$

58 Na verdade, o teorema IVa desempenha um papel fundamental na prova do teorema 1 de BLA, o que permite a Frege eliminar a introdução de extensões de conceitos de ordem superior. A teoria dos percursos de valores de Frege depende do teorema 1. Assim, é possível conjecturar que Frege não tinha qualquer tal teoria em 1884. Cf. DUARTE, 2009, cap. 3.

são semelhantes a proposições e à identidade de conteúdo. Além disso, indiquei que o sistema de Frege não era completo, no sentido em que uma fórmula necessária para a prova do Princípio de Hume a partir da definição explícita de número não poderia ser derivada nem adicionada como novo axioma. Devido a esse fato, há uma espécie de quebra-cabeça nos *Fundamentos*.

Na seção 3, indiquei que as mudanças ocorridas nas *Leis básicas*, calcadas na distinção entre sentido e referência e na introdução dos valores de verdade como objetos, produziram um sistema lógico extensional, o qual permitiu a introdução do axioma IV. E a partir desse axioma foi possível derivar o teorema IVa, que desempenha um papel central na prova do Princípio de Hume nas *Leis básicas*.

BIBLIOGRAFIA

BEANEY, M. Frege's use of function-argument analysis and this introduction of truth-values as objects. *Grazer Philosophische Studien*, v. 75, p. 93-123, 2007.

BLANCHETE, P. Frege's reduction. *History and Philosophy of Logic*, v. 15, p. 85-103, 1994.

CHATEAUBRIAND, O. *Logical forms part I*: truth and description. Campinas, SP: Coleção CLE, 2001.

DUARTE, A. B. *Lógica e aritmética na filosofia da matemática de Gottlob Frege*. Tese (Doutorado em Filosofia) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2009.

DUARTE, A. B. Sobre um problema relacionado com a regra de substituição para funções em *Begriffsschrift*. IN: SMITH, P. J. et al. *Crença, verdade, racionalidade*: ensaios de filosofia analítica. Salvador, BA: EDUFBA, 2014, p. 189-200.

DUMMETT, M. *Freg*e: philosophy of language. 2ª edição. Cambridge, Mass.:Harvard University Press, 1981.

FREGE, G. *Wissenschaftlicher Briefwechsel.* Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1976.

FREGE, G. Philosophical and mathematical correspondence. Chicago: The University of Chicago Press, 1980.

FREGE, G. Collected papers on mathematics, logic and philosophy. Oxford: Basil Blackwell, 1984.

FREGE, G. *Basic laws of arithmetic*. Tradução de Philip. A. Erbert & Marcus Rossberg. Oxford: Oxford University Press, 2013.

FREGE, G. *Os fundamentos da aritmética*: uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número. Tradução de Luiz Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

FREGE, G. *Conceitografia*: uma linguagem formular do pensamento puro decalcada sobre a da matemática. Introdução, tradução e notas de Paulo Alcoforado, Alessandro Duarte e Guilherme Wyllie. Rio de Janeiro: Nau, 2019.

HADDOCK, G. On Frege's two notions of sense. *History and Philosophy of Logic*, v. **7**, n. 1, p. 31-41, 1986.

HADDOCK, G. *A critical introduction to the philosophy of Gottlob Frege*. Hampshire: Ashgate Publishing, Ltd., 2006.

KIMBERLY HECK, R.; MAY, R. The birth of semantics. *Journal for history of analytical philosophy*, v. 8, n. 6, p. 1-31, 2020.

LANDINI, G. Decomposition and analysis in Frege's *Grundgesetze*. History and philosophy of logic, v. 17, n. 1, p. 121-139, 1996.

LANDINI. G. Frege's cardinals as concept-correlates. *Erkenntnis,* v. 65, p. 207-43, 2006.

LANDINI, G. *Frege's notations*: what they are and how they mean. New York: Palgrave Macmillan, 2012.

MAKIN, G. *The metaphysicians of meaning:* Russell and Frege on sense and denotation. Londres: Routledge, 2000.

RODRIGUES FILHO, A. A. *Frege, fazedores de verdade e o argumento da funda*. Tese (Doutorado em Filosofia) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2007.

RUFFINO, M. *Frege´s notion of logical objects*. Tese (Doutorado em Filosofia) – Universidade da Califórnia, Los Angeles, 1996.

RUFFINO, M. Extension as representative objects in Frege´s logic". *Erkenntnis,* v. 53, n. 2, p. 239-52, 2000.

SAN MILLÁN, J. B. *La lógica de Gottlob Frege*: 1879 – 1903. Tese (Doutorado em Lógica Pura e Aplicada) – Universidade de Barcelona, 2015.

SCHIRN, M. Frege's objects of a quite special kind. *Erkenntnis,* v. 32, p. 27-60, 1990.