Sobre as mudanças na conceitografia: papel formal dos valores de verdade

On the changes in concept-script: the formal role of truth-values

10.21680/1983-2109.2022v29n59ID29630

Alessandro Bandeira Duarte
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ)
0000-0002-4011-5000
dedekind@ufrrj.br

Resumo: O objetivo do presente artigo é indicar a função que a distinção entre sentido e referência desempenha dentro da perspectiva logicista de Frege. Em particular, a partir da distinção, Frege busca introduzir os valores de verdade como objetos, os quais desempenham um papel central no sistema lógico das *Leis básicas da aritmética*.

Palavras-chave: Sentido e referência; Valores de verdade; Frege; Axioma IV; Teorema IVa

Abstract: The paper's aim is to discuss the role that the distinction between sense and meaning plays within Frege's logical perspective. In particular, with the distinction, Frege intents to introduce the truth-values as objects, which play a central role in the logical system of *Basic laws of arithmetic*.

Keywords: Sense and meaning; Truth-values; Frege; Axiom IV; Theorem IVa

1. INTRODUÇÃO

O objetivo do presente artigo é indicar a função que a distinção entre sentido e referência desempenha dentro da perspectiva logicista de Frege. Em particular, a partir da distinção, Frege busca introduzir os valores de verdade como objetos, os quais desempenham um papel central no sistema lógico das *Leis básicas da aritmética* (LBA). Esse fato é mencionado no prefácio de LBA (vol. 1):

> The old primitive signs that re-occur outwardly unaltered, and whose algorithm has hardly changed, have however been provided with different explanations. What was formerly the content-stroke reappears as the horizontal. These are consequences of a deep-reaching development in my logical views. Previously I distinguished two components in that whose external form is a declarative sentence: 1) acknowledgment of truth, 2) the content, which is acknowledged as true. The content I called judgeable content. This now splits for me into what I call thought and what I call truth-value. This is a consequence of the distinction between the sense and the reference of a sign. In this instance, the thought is the sense of a proposition and the truth-value is its reference. In addition, there is the acknowledgment that the truth-value is the True. For I distinguish two truth-values: the True and the False. I have justified this in more detail in my above mentioned essay Über Sinn und Bedeutung. Here, it might merely be mentioned that only in this way can indirect speech be accounted for correctly (FREGE, 2013, p. X).

Com intuito de entendermos melhor a passagem acima, é necessário, antes, compreendermos o sistema lógico desenvolvido entre 1879 e 1884. Esse será o tema da seção 2. Será visto que o sistema lógico de Frege não é completamente extensional. Além disso, a conceitografia[1] não é completa, uma vez que uma fórmula necessária ao sistema não pode ser derivada.

Na seção 3, discuto a conceitografia de LBA, mostrando como a introdução dos valores de verdade como objetos permite a inclusão do axioma IV no sistema, a partir do qual se segue o teorema IVa, cujo equivalente na linguagem da Conceitografia não é derivável.

2. SISTEMA LÓGICO DA CONCEITOGRAFIA E DOS FUNDAMENTOS DA ARITMÉTICA

2.1 A conceitografia em 1879

Como é bem conhecido, pelo menos até 1903, Frege defendeu o logicismo, tese segundo a qual a aritmética dos números naturais é redutível à lógica. No intuito de estabelecer rigorosamente essa tese, Frege percebeu a necessidade de criar uma linguagem artificial – denominada de conceitografia –, a partir da qual conceitos aritméticos pudessem ser logicamente definidos sem qualquer tipo de ambiguidade e provas de teoremas aritméticos pudessem ser estabelecidas sem a intrusão velada de qualquer elemento estranho à lógica. Dessa necessidade surgiu a publicação de seu primeiro livro, *Conceitografia*. Esse livro é dividido em três partes:

---

[1] Usaremos "conceitografia" para nomear o sistema lógico de Frege.

1. na primeira, Frege explica as noções lógicas primitivas e as regras de inferência, introduzindo seus respectivos símbolos. Além disso, há certas regras sintáticas implícitas que permitem produzir expressões complexas significativas a partir desses primitivos;

2. na segunda, os axiomas lógicos são apresentados e vários teoremas lógicos são derivados a partir desses axiomas junto com as regras de inferência;

3. na terceira, Frege introduz quatro definições de conceitos aritméticos referentes à teoria das sequências, a partir das quais teoremas matemáticos são derivados[2].

2.1.1 Os primitivos lógicos

O sistema lógico da *Conceitografia* é constituído dos seguintes símbolos lógicos primitivos:

a) letras latinas minúsculas: *a, b, c, d,...* cujo papel semântico é similar ao papel desempenhado na álgebra, a saber, o de expressar generalidade[3];

b) traço de juízo: $\vdash$, que tem o papel de transformar um termo em fórmula[4];

c) traço de conteúdo: $—$, cujo papel sintático é anexar-se a termos que expressam conteúdos conceituais asseríveis, formando novo termo[5];

d) traço condicional: $\sqsubset$, que funciona como implicação material[6];

e) traço de negação: $\top$, que funciona como a negação[7];

f) letras góticas: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ e $\mathfrak{F}$, que ocorrem junto com símbolo que expressa o quantificador universal[8];

g) quantificador universal: $\smile$[9];

h) identidade de conteúdo: $\equiv$[10].

---

2 Dentre esses teoremas os mais importantes são: fórmula 81 (indução matemática), fórmula 98 (transitividade do ancestral forte) e 133 (tricotomia induzida por uma relação funcional).
3 Cf. FREGE, 2019, §1.
4 Cf. FREGE, 2019,§2.
5 Cf. FREGE, 2019,§2.
6 Cf. FREGE, 2019, §5.
7 Cf. FREGE, 2019, §7.
8 CF. FREGE, 2019, §11.
9 CF. FREGE, 2019, §11.
10 CF. FREGE, 2019, §8.

Antes de continuarmos, algumas explicações são necessárias. A conceitografia é uma lógica de termos. Todo termo da conceitografia expressa um conteúdo conceitual, o qual pode ser de dois tipos:

i. conteúdo conceitual asserível;

ii. conteúdo conceitual não-asserível.

Antes de continuarmos, algumas explicações são necessárias. A conceitografia é uma lógica de termos. Todo termo da conceitografia expressa um conteúdo conceitual, o qual pode ser de dois tipos:

i. conteúdo conceitual asserível;

ii. conteúdo conceitual não-asserível.

iii. Na linguagem natural, conteúdos conceituais asseríveis seriam expressos por sentenças declarativas. Contudo, não é muito claro que tipo de entidade são os conteúdos conceituais asseríveis. Em §3 da *Conceitografia*, Frege parece estabelecer um critério de identidade para estas entidades: dois conteúdos conceituais asseríveis serão iguais se (?) e somente se eles tiverem o mesmo conjunto de consequências dentro de uma mesma teoria. Esse critério suscitou debate na literatura secundária. Por exemplo, Beaney (2007, p. 100) sustenta que o critério de identidade é dado por equivalência lógica. Rodrigues Filho (2007, p. 81-2) e Haddock (1986, p. 38-41; 2006, p. 6) rejeitam essa posição de Beaney, pois o critério implicaria que todos os teoremas da aritmética teriam o mesmo conteúdo conceitual asserível. De acordo com Rodrigues Filho (2007), no critério de identidade para conteúdos conceituais asseríveis, Frege teria uma outra noção de equivalência que seria mais forte que equivalência lógica e que evitaria tal consequência indesejável. Eu concordo com Rodrigues Filho e Haddock e penso que esse critério não pode ser dado por equivalência lógica. Todavia, diferentemente de Rodrigues Filho, defendo que Frege tinha em mente na §3 apenas a condição: dois conteúdos conceituais são iguais somente se eles têm o mesmo conjunto de consequências (dentro de uma mesma teoria). Essa condição é capturada pelo axioma 52 da *Conceitografia*[11].

De acordo com Makin (1994, p. 83), uma vez que os conteúdos conceituais asseríveis são portadores da verdade e ocorrem em cadeias referenciais, eles

11 Cf. DUARTE, 2009, cap. 2.

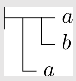
poderiam ser considerados como entidades próximas às proposições russellianas. Na visão Haddock (2006, p. 4-5), conteúdos conceituais asseríveis seriam uma sequência de símbolos à qual se poderia anexar o traço de conteúdo ou a combinação do traço de conteúdo e do traço de juízo. Na interpretação de Haddock, os conteúdos conceituais asseríveis seriam entidades linguísticas. Essa interpretação, contudo, tem o seguinte defeito: o que diferenciaria a expressão “casa”, à qual não se poderia anexar o traço de conteúdo, da expressão “há casa”, à qual se poderia anexar o traço de conteúdo? Em uma carta a Husserl (1980, p. 63), Frege afirma que conteúdo conceitual asserível é uma mescla de pensamento e valor de verdade, o que concorda, em certo sentido, com a posição de Makin. De fato, de acordo com a interpretação que defenderei aqui, conteúdos conceituais asseríveis são entidades intensionais. Isso acarretará que o sistema lógico da Conceitografia é igualmente intensional, uma vez que se pode produzir um termo bem-formado, usando-se a identidade de conteúdo flanqueada por símbolos que expressam conteúdos conceituais asseríveis[12]

Conteúdos conceituais não-asseríveis seriam expressos por termos singulares como “2” ou “1+1”. Essa distinção será importante quando chegarmos na aplicação sintática do traço de conteúdo.

Na *Conceitografia*, Frege rejeita a análise de sentenças em termos de sujeito e predicado[13]. Na visão dele, a análise correta é em termos de função e argumento[14] e uma mesma sentença pode ter mais de uma análise[15]. Contudo, tais análises não modificam o conteúdo conceitual asserível expresso[16].

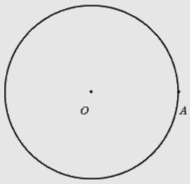
Há uma ambiguidade em relação às letras latinas. Às vezes elas percorrem conteúdos conceituais asseríveis,[17] às vezes elas podem percorrer conteúdos conceituais asseríveis ou conteúdos conceituais não-asseríveis[18] [19] e às vezes elas são usadas como expressando funções[20] [21].

---

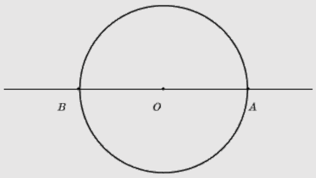
[12] No prefácio da *Conceitografia*, Frege afirma que a fórmula $\vdash (\top\!\!\top\, a \equiv a)$ poderia ser introduzida no sistema como um axioma. Como veremos, o termo $\top\!\!\top\, a$ expressa um conteúdo conceitual asserível. Nesse caso, o termo “a” deve também ser conteúdo conceitual asserível. Além disso, as definições da parte 3 da Conceitografia são identidades flanqueadas por símbolos que expressam conteúdos conceituais asseríveis.
13 Cf. FREGE, 2019, §3.
14 Cf. FREGE, 2019, §9.
15 Cf. FREGE, 2019, §9.
16 Implicitamente, Frege também analisa termos singulares complexos em vista de função e argumento: “*Se, em uma expressão,* ***cujo conteúdo não precisa ser asserível,*** *um sinal simples ou composto ocorre em um ou mais lugares, e se o pensarmos como substituível por outro [sinal], mas sempre substituível pela mesma expressão em todos os lugares ou em algum desses lugares, então chamamos de função a parte invariante da expressão e chamamos de argumentos a parte substituível*” (FREGE, 2019, p. 55, meu grifo).
[17] Isso é certamente o caso de “*a*” e “*b*”na fórmula  . Mais para frente veremos as regras sintáticas.

18 As letras “*c*” e “d” ora são usadas como percorrendo conteúdos conceituais asseríveis (veja fórmula 2 da *Conceitografia*), ora podem ser usadas como percorrendo conteúdos conceituais não-asseríveis ou asseríveis

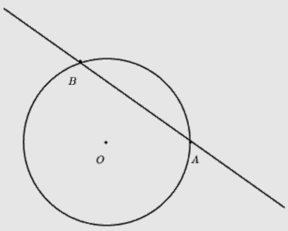
Outro ponto bastante controverso diz respeito à identidade de conteúdo. Frege parece dar uma interpretação metalinguística a esse símbolo, assumindo que ele relaciona nomes para conteúdos conceituais. O ponto dele parece ser o seguinte: se a identidade de conteúdo relacionasse os próprios conteúdos conceituais, então toda identidade verdadeira expressaria a autoidentidade, de forma que elas seriam necessariamente verdadeiras (analíticas). Todavia, de acordo com Frege, tal resultado é insatisfatório, pois algumas identidades são sintéticas.[22] Frege apresenta um exemplo em que o mesmo ponto pode ser determinado de formas distintas. Sejam um círculo qualquer de centro O e um ponto fixo A na circunferência desse círculo, conforme a figura abaixo:



Seja uma reta que passe pelos pontos A e O, chegando no lado oposto da circunferência, produzindo o ponto B, de acordo com a próxima figura:



Agora, pense nessa reta movimentando-se, mas mantendo o ponto A fixo. Cada ponto de interseção entre a reta e a circunferência será chamado de ponto B. Exemplo:



(fórmulas 52, 54, 57, 58). De fato, veremos que as fórmulas 52, 54 e 57 têm uma interpretação “proposicional” também.

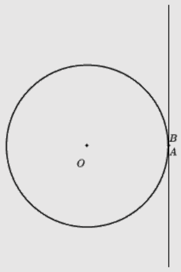
19 Em geral, “*x*”, “*y*” e “*z*” parecem ser usadas como percorrendo conteúdos conceituais não-asseríveis.

20 Na fórmula 22, “*f*” percorre claramente conteúdos asseríveis. Por outro lado, na fórmula 58, “*f*” percorre funções unárias. Em várias fórmulas da terceira parte, “*f*” percorre funções binárias. Em geral, as letras “*g*”, “*h*” e “*F*” são usadas como percorrendo funções unárias.

21 A introdução do horizontal dissipará tal ambiguidade. Isso será visto mais para frente.

[22] “Disso se segue que os nomes diferentes para o mesmo conteúdo nem sempre são uma mera questão irrelevante de forma; pelo contrário, eles atingem a própria essência da coisa, quando eles estão associados a modos diferentes de determinação [do conteúdo]. Neste caso, o juízo que tem por objeto a identidade de conteúdo é sintético, no sentido kantiano” (FREGE, 2019, p. 52-53).

Quando essa reta é tangente à circunferência passando pelo ponto A, o ponto B é determinado pela descrição "ponto que corresponde à linha perpendicular ao diâmetro".



Nesse caso, temos que o ponto *A* é o mesmo que o ponto *B*. Esses dois nomes distintos determinam dois modos de determinação do mesmo conteúdo[23]. Uma vez que Frege tem apenas uma entidade semântica na *Conceitografia* – os conteúdos conceituais –, ele foi obrigado a estipular que "$\equiv$" relaciona nomes, sendo que nomes diferentes podem[24] designar modos distintos de determinação do conteúdo, o que explicaria a diferença cognitiva entre "$a \equiv a$" e "$a \equiv b$".

2.1.2 Regras de boa-formação e de inferência

Não há na *Conceitografia* qualquer regra explícita de boa-formação de expressões. Contudo, é possível determinar certas regras que são usadas na parte 1 do livro. Em relação às regras de inferência, Frege sustenta a posição segundo a qual a única regra de inferência do sistema é o *modus ponens* (MP)[25]. Todavia, como será visto, Frege faz uso de outras regras distintas de MP.

Apresento agora as regras sintáticas de boa-formação:

(1) as letras latinas são termos[26] (exceto aquelas que, no contexto, designam funções em geral);

(2) Se Φ^n expressa uma função n-ária e $\delta_1, \ldots, \delta_n$ são termos, então $\Phi(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ é um termo;

---

23 Cf. FREGE, 2019, §8. No seguinte link, há uma animação da situação apresentada por Frege: https://www.geogebra.org/m/sejvbe7u .
24 Nas definições, tanto o *definiendum* como o *definiens* são nomeados por diferentes nomes. Contudo, por estipulação, afirma-se que esses nomes são sinônimos.
25 Cf. FREGE, 2019, §6.
26 Os termos expressam conteúdos conceituais.

(3) Se δ_1, δ_2 são termos, então $(\delta_1 \equiv \delta_2)$ é um termo que expressa um conteúdo conceitual asserível;

(4) Se Δ_1, Δ_2 são termos que expressam conteúdos conceituais asseríveis, então $— \Delta_1$,[27] $\begin{array}{l} \top\!\!— \Delta_2 \\ \llcorner\, \Delta_1 \end{array}$[28], $-\!\!\!\top\!\!- \Delta_1$ serão termos que expressam conteúdos conceituais asseríveis[29];

(5) Se $— \Phi(\delta)$ é um termo, então $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!— \Phi(\mathfrak{a})$ é um termo que expressa um conteúdo asserível;

(6) Se $— M_\alpha\Phi(\alpha)$ é um termo, então $\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\!— M_\alpha\mathfrak{F}(\alpha)$ é um termo que expressa um conteúdo asserível[30];

(7) Nada mais é termo

(8) Uma fórmula é obtida adicionando-se o traço de juízo a termos da forma $— \Delta$: $\vdash \Delta$[31]

As regras de inferências são:

(MP) De $\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!— \Delta_2 \\ \;\;\llcorner\, \Delta_1 \end{array}$ e $\vdash \Delta_1$, inferir $\vdash \Delta_2$.

(GU) De $\vdash \Phi(\delta)$, inferir $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!— \Phi(\mathfrak{a})$ (generalização universal)

(Conf) de $\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!— \Phi(\delta) \\ \;\;\llcorner\, \Delta \end{array}$, em que δ não ocorre em Δ, inferir $\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!— \Phi(\mathfrak{a}) \\ \;\;\llcorner\, \Delta \end{array}$ (confinamento da generalidade ao consequente).

(Sub 1) Qualquer substituição uniforme de conteúdos conceituais asseríveis por outros conteúdos conceituais asseríveis em uma fórmula produz uma nova fórmula. Exemplo: seja a fórmula $\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\!\!— a \\ \;\;|\;\;\llcorner\, b \\ \;\;\llcorner\, a \end{array}$

[27] "Nem todo conteúdo pode tornar-se um juízo, mesmo quando $\vdash$ antecede a seu sinal; a ideia de "casa", por exemplo, não se torna. Por esta razão, distinguimos entre conteúdos asseríveis e não-asseríveis. [...] O que quer que se siga o traço de conteúdo deve sempre ser um conteúdo asserível" (FREGE, 2019, p. 36).

28 "Se *A* e *B* significam conteúdos asseríveis, então surgem as seguintes quatro possibilidades:

1. *A* é afirmado e *B* é afirmado
2. *A* é afirmado e *B* é negado
3. *A* é negado e *B* é afirmado
4. *A* é negado e *B* é negado

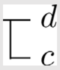
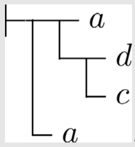
Agora, $\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!— A \\ \;\;\llcorner\, B \end{array}$

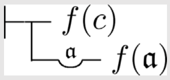
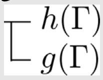
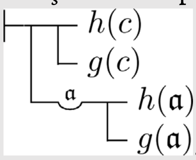
significa o juízo de que a terceira dessas possibilidades não ocorre, mas as outras três sim" (FREGE, 2019, p. 30-40).

29 As regras de Frege não são puramente sintáticas.

30 *M* expressa uma função de segunda ordem.

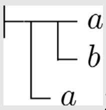
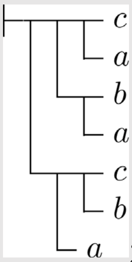
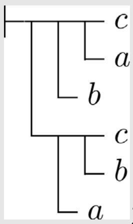
31 Landini (2012, p. 47-48) apresenta regras similares.

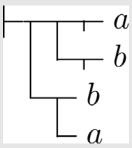
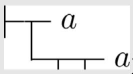
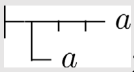
(axioma 1 da *Conceitografia*). Substituindo-se uniformemente b por  nessa fórmula, obtemos a seguinte nova fórmula .

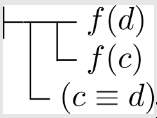
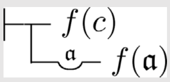
(Sub 2) Qualquer substituição uniforme de uma função por outras funções em uma fórmula produz uma nova fórmula. Exemplo: seja a fórmula  (axioma 58 da *Conceitografia*). Substituindo-se uniformemente a função $f(\Gamma)$ pela função  nessa fórmula, obtemos a fórmula .

2.1.3 Axiomas da *Conceitografia*

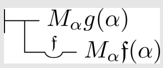
Na parte 2 da *Conceitografia,* Frege estabelece 9 axiomas, a saber:

Fórmula 1: ; Fórmula 2: ; Fórmula 8: ;

Fórmula 28:  Fórmula 31: ; Fórmula 41: ;

Fórmula 52: ; Fórmula 54: $\vdash (c \equiv c)$; Fórmula 58: 

Na literatura secundária, estes axiomas são divididos da seguinte forma: 1), 2), 8), 28), 31), 41) formam o sistema proposicional Fregeano. A adição de 52), 54) e 58) produzem o sistema axiomático da lógica de primeira ordem com identidade[32]. Contudo, na lógica de termos de Frege, tal divisão seria irrelevante.

32 Na parte 3 da *Conceitografia*, Frege faz certas substituições no axioma 58, transformando-o em uma versão de segunda ordem, que poderia ser formulado da seguinte forma: 

De fato, o axioma 52 e o axioma 54 podem ter uma interpretação proposicional. Além disso, o teorema 57

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\; f(c) \\ \quad\;\; \llcorner\; f(d) \\ \;\;\llcorner\; (c \equiv d) \end{array}$$

também tem uma interpretação proposicional. Há pelo menos duas evidências que corroboram com a minha afirmação. A primeira está relacionada com uma afirmação feita por Frege no prefácio da Conceitografia

> Já observei que as fórmulas (31) e (41) podem ser reduzidas a uma única fórmula
>
> $$\vdash (\top\!\top\, a \equiv a)$$
>
> com a qual são possíveis outras simplificações (FREGE, 2019, p. 31).

Na passagem, Frege sugere que a fórmula $\vdash (\top\!\top\, a \equiv a)$ poderia ser adicionada como um axioma no sistema e que esta inclusão produziria uma simplificação no sistema axiomático. A interpretação mais plausível é que desta fórmula os axiomas 31 e 41 seriam derivados. Se isso é o caso, então a identidade de conteúdo funcionaria como uma espécie de equivalência[33].

O ponto é: como 31 e 41 seriam derivadas no sistema? Minha sugestão é a seguinte: 31 e 41 são derivadas, usando-se o axioma 52 e o teorema 57. Nesse caso, essas fórmulas têm uma interpretação proposicional. A derivação é como se segue. Assuma

$$\text{i)}\; \vdash (\top\!\top\, a \equiv a)$$

Usando a regra (Sub 1) na fórmula 52, obtemos a seguinte fórmula:

$$\text{ii)}\; \begin{array}{l} \vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\; f(a) \\ \quad\;\; \llcorner\; f(\top\!\top\, a) \\ \;\;\llcorner\; (\top\!\top\, a \equiv a) \end{array}$$[34]

Usando a regra (Sub 2) na fórmula ii), obtemos:

$$\text{iii)}\; \begin{array}{l} \vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\; a \\ \quad\;\; \llcorner\!\top\!\top\; a \\ \;\;\llcorner\; (\top\!\top\, a \equiv a) \end{array}$$

A substituição da função foi a seguinte: a função $f(\Gamma)$ é substituída pela função Γ[35]. De i) e iii), aplicando-se MP, obtemos a fórmula 31[36].

---

33 Chateaubriand (2001, p. 270) afirma que a identidade de conteúdo em $\vdash (\top\!\top\, a \equiv a)$ expressaria a equivalência lógica.
34 Aqui substituímos *c* por $\top\!\top\, a$ e *d* por *a*.
35 Essa função é uma espécie de função identidade, em que o valor da função para um certo argumento é o próprio argumento. Em LBA, essa função será substituída pela função dada pelo horizontal.
36 A fórmula 41 é obtida de forma semelhante a partir da fórmula 57.

são semelhantes a proposições e à identidade de conteúdo. Além disso, indiquei que o sistema de Frege não era completo, no sentido em que uma fórmula necessária para a prova do Princípio de Hume a partir da definição explícita de número não poderia ser derivada nem adicionada como novo axioma. Devido a esse fato, há uma espécie de quebra-cabeça nos *Fundamentos*.

Na seção 3, indiquei que as mudanças ocorridas nas *Leis básicas*, calcadas na distinção entre sentido e referência e na introdução dos valores de verdade como objetos, produziram um sistema lógico extensional, o qual permitiu a introdução do axioma IV. E a partir desse axioma foi possível derivar o teorema IVa, que desempenha um papel central na prova do Princípio de Hume nas *Leis básicas*.

BIBLIOGRAFIA

BEANEY, M. Frege's use of function-argument analysis and this introduction of truth-values as objects. *Grazer Philosophische Studien*, v. 75, p. 93-123, 2007.

BLANCHETE, P. Frege's reduction. *History and Philosophy of Logic*, v. 15, p. 85-103, 1994.

CHATEAUBRIAND, O. *Logical forms part I*: truth and description. Campinas, SP: Coleção CLE, 2001.

DUARTE, A. B. *Lógica e aritmética na filosofia da matemática de Gottlob Frege*. Tese (Doutorado em Filosofia) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2009.

DUARTE, A. B. Sobre um problema relacionado com a regra de substituição para funções em *Begriffsschrift*. IN: SMITH, P. J. et al. *Crença, verdade, racionalidade*: ensaios de filosofia analítica. Salvador, BA: EDUFBA, 2014, p. 189-200.

DUMMETT, M. *Frege*: philosophy of language. 2ª edição. Cambridge, Mass.:Harvard University Press, 1981.

FREGE, G. *Wissenschaftlicher Briefwechsel*. Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1976.

FREGE, G. Philosophical and mathematical correspondence. Chicago: The University of Chicago Press, 1980.

FREGE, G. Collected papers on mathematics, logic and philosophy. Oxford: Basil Blackwell, 1984.

FREGE, G. *Basic laws of arithmetic*. Tradução de Philip. A. Erbert & Marcus Rossberg. Oxford: Oxford University Press, 2013.

FREGE, G. *Os fundamentos da aritmética*: uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número. Tradução de Luiz Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

FREGE, G. *Conceitografia*: uma linguagem formular do pensamento puro decalcada sobre a da matemática. Introdução, tradução e notas de Paulo Alcoforado, Alessandro Duarte e Guilherme Wyllie. Rio de Janeiro: Nau, 2019.

HADDOCK, G. On Frege's two notions of sense. *History and Philosophy of Logic*, v. **7**, n. 1, p. 31-41, 1986.

HADDOCK, G. *A critical introduction to the philosophy of Gottlob Frege*. Hampshire: Ashgate Publishing, Ltd., 2006.

KIMBERLY HECK, R.; MAY, R. The birth of semantics. *Journal for history of analytical philosophy*, v. 8, n. 6, p. 1-31, 2020.

LANDINI, G. Decomposition and analysis in Frege's *Grundgesetze*. History and philosophy of logic, v. 17, n. 1, p. 121-139, 1996.

LANDINI. G. Frege's cardinals as concept-correlates. *Erkenntnis,* v. 65, p. 207-43, 2006.

LANDINI, G. *Frege's notations*: what they are and how they mean. New York: Palgrave Macmillan, 2012.

MAKIN, G. *The metaphysicians of meaning:* Russell and Frege on sense and denotation. Londres: Routledge, 2000.

RODRIGUES FILHO, A. A. *Frege, fazedores de verdade e o argumento da funda*. Tese (Doutorado em Filosofia) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2007.

RUFFINO, M. *Frege´s notion of logical objects*. Tese (Doutorado em Filosofia) – Universidade da Califórnia, Los Angeles, 1996.

RUFFINO, M. Extension as representative objects in Frege´s logic". *Erkenntnis,* v. 53, n. 2, p. 239-52, 2000.

SAN MILLÁN, J. B. *La lógica de Gottlob Frege*: 1879 – 1903. Tese (Doutorado em Lógica Pura e Aplicada) – Universidade de Barcelona, 2015.

SCHIRN, M. Frege's objects of a quite special kind. *Erkenntnis,* v. 32, p. 27-60, 1990.