

Lógica e completude¹

Arno A. Viero²

Resumo

Quine, em seu livro Philosophy of Logic, identifica lógica com lógica de primeira ordem e defende a concepção segundo a qual a completude é uma propriedade necessária dos sistemas lógicos. O objetivo deste trabalho é discutir a argumentação de Quine e mostrar que suas idéias a respeito da natureza da lógica apresentam diversos problemas tanto conceituais, como técnicos.

A característica mais importante da investigação lógica atual é o desenvolvimento de vários sistemas lógicos, com o auxílio da noção de *linguagem formalizada* e o estudo de suas propriedades metateóricas. Assim, o domínio desta disciplina é constituído por uma classe bastante abrangente de linguagens matematicamente caracterizáveis que dá, por sua vez, origem a uma investigação extremamente diversificada, tanto nos métodos utilizados, quanto nos objetivos a serem alcançados.

Do ponto de vista filosófico, uma das várias questões colocadas é determinar quais os critérios que devem ser utilizados na classificação e ordenação de tais sistemas. Atualmente, a concepção mais aceita é aquela que considera a *lógica de primeira ordem clássica* (LPO)³ como o sistema lógico por excelência e classifica os demais sistemas como sendo restrições, extensões ou alternativas à lógica clássica.

¹ Este trabalho foi apresentado na *V Conferência Interamericana de Filosofia* organizada pelo Departamento de Filosofia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, em agosto de 2000.

² Universidade Federal Fluminense, Departamento de Filosofia.

³ Doravante, utilizaremos as abreviações LPO para *lógica de primeira ordem (clássica)*, LPOI para *lógica de primeira ordem (clássica) com identidade* e LSO para *lógica de segunda ordem*.

Dentro deste contexto existe um problema extremamente interessante, que é o de saber como classificar a *lógica de segunda ordem* (LSO). Vários filósofos têm defendido a concepção segundo a qual tal sistema, na verdade, não pertenceria ao domínio da lógica. Quine, talvez, tenha sido um dos defensores mais intransigentes desta concepção. Em vários lugares de sua obra ele tenta mostrar que a LSO não faria parte do domínio da lógica, mas pertenceria ao domínio da matemática. O objetivo deste trabalho, portanto, é o de examinar a argumentação de Quine quando procura estabelecer a LPO como sendo o sistema lógico por excelência e, em particular, a sua concepção de que a propriedade de *completude* seria uma característica imprescindível de tais sistemas.

Quine desenvolve, com mais detalhes, as suas idéias envolvendo a lógica e a noção de *completude* no seu artigo intitulado “Existence and Quantification”, publicado em *Ontological Relativity and Other Essays* (1966) e no livro *Philosophy of Logic* (1970)⁴. Neste último, a completude da LPO aparece em pelo menos três momentos da discussão que envolve a natureza da lógica, respectivamente, na caracterização da noção de *verdade lógica* (capítulo 4), no exame do conceito de *identidade* (capítulo 5) e na discussão envolvendo a *quantificação ramificada* (capítulo 6).

O problema em relação à identidade é o de determinar se ela é uma noção lógica ou uma noção matemática. Quine apresenta quatro razões para defender a idéia segundo a qual a identidade pertenceria ao domínio da lógica, sendo que uma delas envolve o apelo à noção de *completude*⁵. A LPOI, de

⁴ A argumentação que Quine apresenta nestes dois trabalhos é reproduzida na íntegra em um artigo de 1990, intitulado “Immanence and Validity”, publicado na edição ampliada de seu livro *Selected Logical Papers* (ver bibliografia).

⁵ As outras três seriam: o conceito de identidade é completamente universal; os conectivos sentenciais, as variáveis e as sentenças abertas de uma linguagem seriam suficientes para determinar que definições de identidade seriam satisfatórias; e, o predicado de identidade estaria disponível, sem suposições adicionais, em qualquer linguagem que possuísse uma gramática padrão (que seria, basicamente, aquela da LPO).

forma semelhante à LPO, é completa, ao passo que os principais sistemas matemáticos, como a aritmética elementar e a teoria de conjuntos, seriam teorias incompletas. Este dado, segundo Quine, seria mais uma razão para classificar o predicado de identidade como sendo uma noção lógica.

A questão envolvendo a quantificação ramificada é outro problema no qual a completude da LPO é invocada como sendo a propriedade capaz de distinguir os sistemas lógicos dos demais. Quine chama a atenção para o fato de que fórmulas do tipo:

$$(a) \quad (z) (\exists w) (x) (\exists y) Fxyzw$$

fariam com que a escolha de y dependesse da escolha de z . Uma possível tentativa de remediar esta situação seria a introdução da chamada *quantificação ramificada* que transformaria a sentença (a) em:

$$(b) \quad (x) (\exists y) \\ Fxyzw \\ (z) (\exists w)$$

O primeiro inconveniente detectado por Quine em relação a (b) é que ela poderia ser apresentada da seguinte forma:

$$(c) \quad (\exists f) (\exists g) (x) (z) Fx f(x) z g(z)$$

o que mostraria, segundo o *critério de compromisso ontológico*⁶ de Quine, que tal fórmula estaria pressupondo a existência de um certo tipo de função, o que faria com que (b) fosse uma sentença pertencente ao domínio da matemática e não ao da lógica. Portanto, a quantificação ramificada nos levaria para

⁶ Quine, ao longo de sua obra, formula tal critério de várias formas; uma das mais conhecidas talvez seja a seguinte: *entidades de um certo tipo são assumidas por uma teoria se e somente se alguma delas deve estar presente entre os valores das variáveis para que os enunciados afirmados na teoria sejam verdadeiros* (Quine, 1951, p. 103).

além do âmbito da lógica clássica. Além disso, graças aos trabalhos de Craig e Henkin⁷, entre outros, ficou demonstrado que em sistemas nos quais é utilizada a quantificação ramificada não é possível obter um procedimento de prova completo tanto para as sentenças logicamente verdadeiras, como para as suas negações. Tais fatos seriam suficientes, no entender de Quine, para mostrar que (b) seria uma sentença pertencente à matemática.

No exame da noção de *verdade lógica*, o conceito de *completude* também é utilizado. Segundo Quine, a lógica poderia ser definida como a disciplina que trata sistematicamente de um conjunto de noções interderiváveis, a saber, *verdade lógica*, *falsidade lógica*, *implicação lógica*, *incompatibilidade lógica* e *equivalência lógica*. Desta forma, poderíamos eleger a noção de *verdade lógica* e definir todas as demais noções em função desta, sem prejuízo algum para o entendimento e desenvolvimento desta disciplina. É por esta razão que Quine define a lógica como o estudo sistemático das verdades lógicas.

É claro que, dentro deste contexto, o problema que imediatamente se coloca é o de definir a noção de *verdade lógica*. Quine, no início do capítulo 4 de seu livro *Philosophy of Logic*, apresenta duas definições:

- (1) *Verdade lógica é uma sentença a partir da qual só é possível obter verdades quando substituirmos as suas sentenças simples por sentenças*⁸
- (2) *Um esquema*⁹ *é válido se ele é satisfeito por todos os seus modelos.*

⁷ Ver bibliografia.

⁸ "A logical truth, then, is definable as a sentence from which we get only truths when we substitute sentences for its simple sentences (...)" (Quine, 1970, p. 50).

⁹ De acordo com a terminologia quineana um esquema difere de uma sentença unicamente pelo fato de que, no primeiro, os predicados são substituídos por 'letras esquemáticas'. Assim, $\exists x (Fx \text{ ou } \neg Fx)$ seria um esquema, ao passo que $\exists x (x \text{ flutua ou } \neg(x \text{ flutua}))$ seria uma sentença.

A principal diferença entre estas duas definições é que enquanto a primeira utiliza a noção de *substituição* para definir verdade lógica, a segunda utiliza a noção de *modelo*.

O problema examinado logo a seguir é o de determinar se estas duas definições são equivalentes. Quine chama a atenção para o fato de que, se a cada sentença aberta correspondesse um conjunto e, inversamente, a cada conjunto correspondesse uma sentença aberta, as duas definições naturalmente coincidiriam. No entanto, através do *paradoxo de Russell* é possível constatar que a primeira das condições acima não é satisfeita e, através do *paradoxo de Grelling*, que a segunda também não é satisfeita. Esta situação pareceria indicar uma certa discrepância entre as definições (1) e (2). Contudo, Quine apela para dois resultados os quais mostrariam que as duas definições em questão seriam extensionalmente equivalentes, a saber,

(I) *Se um esquema se torna verdadeiro através de toda substituição de sentenças da teoria elementar do números, então ele é satisfeito por todos os modelos.*

(II) *Se um esquema é satisfeito por todos os modelos, então ele se torna verdadeiro sob todas as substituições de sentenças.*

(I) e (II), por sua vez, são obtidos a partir dos seguintes teoremas, respectivamente:

(A) *Se um esquema é satisfeito por algum modelo, então ele se torna verdadeiro em alguma substituição de seus esquemas simples (simple schemata) por sentenças da teoria dos números.*

(B) *Se um esquema é satisfeito por todos os modelos, então ele pode ser provado.*

O enunciado (A) tem a sua origem no *teorema de Löwenheim-Skolem* o qual afirma que se Γ é um conjunto consistente de fórmulas de primeira ordem, então Γ possui um modelo infinito enumerável¹⁰. Posteriormente, vários esforços foram feitos no sentido de mostrar como, a partir de Γ , seria

¹⁰ Uma interpretação cujo domínio das variáveis é os números naturais.

possível gerar, de forma efetiva, tal interpretação numérica. O primeiro resultado foi obtido por Hilbert e Bernays, em 1939, e a sua generalização foi estabelecida, mais tarde, por Kleene¹¹. Algumas extensões deste teorema foram demonstradas, posteriormente, por Kreisel (1950) e Wang (1951). (B), por sua vez, é simplesmente o teorema de completude da LPO estabelecido, pela primeira vez, por Gödel, em 1930. A formulação original de tal resultado foi: *toda fórmula válida é provável*. Na verdade, o que Gödel estabeleceu foi algo um pouco mais forte, a saber, que toda fórmula da LPO ou é refutável ou é \aleph_0 -satisfatível.

Desta forma, a partir dos enunciados (I) e (II) é possível mostrar que as definições (1) e (2) são extensionalmente equivalentes, uma vez assegurada que a linguagem objeto seja suficientemente rica para expressar uma certa porção da aritmética elementar¹². O próximo passo de Quine é apresentar razões filosóficas que nos fariam adotar a definição (1) em detrimento da (2), como sendo a forma mais aceitável de definir a noção de *verdade lógica*.

A objeção que Quine apresenta em relação à definição (2) é que a sua elaboração envolveria o recurso a conjuntos, ao passo que a definição de verdade lógica, através da noção de substituição, utilizaria unicamente sentenças. Obviamente ele próprio reconhece, logo a seguir, que utilizar as noções de *substituição* e de *sentença* seria, em última análise, fazer uso de conjuntos, uma vez que uma sentença pode ser concebida como sendo o conjunto de seus *tokens*. A saída para este impasse, segundo ele mesmo, é identificar uma série de signos não com os seus *tokens* mas sim com uma seqüência, no sentido matemático. Ora, Gödel mostrou, de uma forma bastante engenhosa, como é possível estabelecer uma correspondência 1-1 entre signos (e seqüência de signos) e os números naturais.

¹¹ Este resultado é o teorema de número 35 do seu livro *Introduction to Metamathematics*.

¹² Tal porção da aritmética é aquela necessária para formular as operações de adição e multiplicação, bem como a quantificação envolvendo os números naturais.

Assim, ao adotarmos a definição (1) estaríamos nos comprometendo com a aritmética elementar o que, no entender de Quine, seria aceitável por uma razão bastante específica, a saber, a adoção da teoria elementar dos números representaria uma economia ontológica considerável em relação à teoria de conjuntos (uma teoria com pressupostos ontológicos bem mais fortes) e, além disso, para mostrar a equivalência entre (I) e (II), já havíamos sido obrigados a nos comprometer, de alguma forma, com a aritmética elementar. Desta maneira, o que Quine procura estabelecer é que dadas estas duas definições de verdade lógica o princípio de parcimônia ontológica, ou da *navalha de Ockham*¹³, faria com que a adoção de (1) representasse uma economia conceitual significativa em relação à outra definição que teria de utilizar noções conjuntísticas na sua formulação.

No entanto, Quine chama a atenção para um inconveniente da definição (1), ou seja, ao utilizarmos a noção de *verdadeiro em todas as substituições* seríamos remetidos novamente ao âmbito da teoria de conjuntos¹⁴, fazendo com que o ganho ontológico obtido através do recurso aos resultados (I) e (II) fosse perdido.

Este tipo de consideração leva Quine a formular uma terceira definição de verdade lógica:

(3) *Verdade lógica é qualquer sentença produzida por um procedimento de prova completo.*

É evidente que as razões para se adotar tal definição remete diretamente ao teorema de completude. Na verdade, o resultado (B) asseguraria que no âmbito da LPO é possível obter uma definição puramente sintática de verdade lógica.

¹³ Máxima que freqüentemente é formulada nos seguintes termos: *não devemos multiplicar a existência dos entes além do necessário*. Ao que tudo indica, Ockham não teria formulado tal princípio desta forma, mas este é um problema irrelevante para as questões discutidas aqui.

¹⁴ O tratamento do predicado “ser verdadeiro” para as linguagens formalizadas, dado por Tarski, é todo ele elaborado através do recurso à teoria de conjuntos.

Tendo este fato presente, seria possível definir uma sentença como sendo logicamente verdadeira se ela é obtida a partir dos axiomas, através da aplicação, de um número finito de vezes, das regras de inferência do sistema. Uma vez que tal procedimento de geração de sentenças envolveria somente a consideração de seqüências finitas de signos, estaríamos comprometidos unicamente com a teoria dos números. As definições (1), (2) e (3) pressuporiam a aritmética sendo que a última dispensaria a noção de *verdade* e portanto, em nome da austeridade ontológica, apresentar-se-ia como a melhor definição de verdade lógica¹⁵.

A conclusão obtida por Quine através desta discussão envolvendo a quantificação ramificada e os conceitos de *identidade* e de *verdade lógica* é expressa, de uma forma bastante enfática, quase no final do capítulo 6 do seu livro *Philosophy of Logic*:

“Uma concorrência notável das diversas definições de verdade lógica, no capítulo 4, já havia nos sugerido que a lógica quantificacional, tal como ela é concebida classicamente, representa uma unidade sólida e significativa. Nossas reflexões a respeito da quantificação ramificada, confirmam de forma inequívoca, esta impressão. É nos limites da lógica quantificacional clássica que deve ser traçada a fronteira entre a lógica e a matemática” (Quine, 1970, p. 91).

¹⁵ Aliás, a idéia de que o teorema de completude seria um instrumento de eliminação de pressupostos ontológicos é bastante antiga e já havia sido defendida por Quine em seu artigo “Logic and the Reification of Universals”: “*Mesmo na teoria da validade ocorre que o apelo a valores de verdades de enunciados e a extensões de predicados pode, finalmente, ser eliminado (...) a validade na teoria quantificacional pode ser redefinida, simplesmente, através do apelo às regras de prova (desde que Gödel provou que tais regras são completas). Aqui, temos um bom exemplo da eliminação de pressuposições ontológicas em um domínio particular*” (Quine, 1951, p. 116).

As idéias de Quine envolvendo as verdades lógicas e a noção de *completude* são extremamente interessantes, se bem que seja difícil determinar, exatamente, quais as conclusões que podem ser estabelecidas a partir de sua argumentação. A razão disto é que Quine discute o problema a respeito da natureza da lógica dentro de um contexto muito amplo, o qual, por sua vez, envolve a adoção de certos princípios ontológicos e se utiliza de resultados técnicos para estabelecer as suas concepções a respeito da lógica e da sua relação com a matemática. Evidentemente que não se pretende aqui, examinar com detalhes as concepções de Quine em relação a ontologia e a sua postura, muitas vezes nada clara, a respeito do papel dos formalismos na discussão filosófica; no entanto, algumas observações gerais são necessárias para que se possa perceber o alcance das suas idéias.

Em relação aos princípios ontológicos, Quine utiliza, em pontos chaves de sua argumentação, o seu *critério de compromisso ontológico* e a *navalha de Ockham* para identificar a lógica com a LPO. O uso de tais preceitos em uma discussão como esta tem que, necessariamente, vir acompanhado de algum tipo de justificativa e isto devido a razões bastante específicas. No caso do *critério de compromisso ontológico*, desde a década de 50, várias objeções¹⁶, bastante fortes, foram feitas à concepção de que o domínio das variáveis de uma teoria seria o indicador mais adequado dos seus pressupostos ontológicos. Para que a argumentação de Quine tivesse validade hoje, seria necessário algum tipo de reformulação de tal princípio¹⁷. No entanto, é bastante curioso constatar que apesar de todos estes problemas, o *critério de*

¹⁶ Em seu livro intitulado *Ontology and the Vicious-Circle Principle*, C. Chihara apresenta alguns destes problemas envolvendo as concepções ontológicas de Quine.

¹⁷ No caso da LSO, por exemplo, Boolos (1984 e 1985) mostrou que não é necessário pressupor classes ou conjuntos para tornar as sentenças de segunda ordem inteligíveis. A solução seria construir uma definição de verdade *a la Tarski* na qual as variáveis de segunda ordem não teriam classes no seu domínio.

compromisso ontológico é simplesmente assumido pela grande maioria das pessoas que trabalha com problemas ligados à lógica e à filosofia da matemática.

No que diz respeito à *navalha de Ockham* o problema que se coloca é semelhante. Já há algum tempo várias dúvidas têm sido levantadas em relação a sua formulação e a sua aplicação¹⁸. O resultado disto é que, atualmente, tal princípio de economia ontológica requer algum tipo de discussão preliminar sem a qual as conclusões obtidas através de sua utilização podem ser apresentadas como sendo, na verdade, “prejuízos ontológicos” do seu autor, antes que objeções a certo tipo de postura filosófica.

O recurso a teoremas envolvendo os formalismos é outro problema, bastante sério, na avaliação das conclusões obtidas por Quine. A argumentação em torno da noção de *identidade* é bastante reveladora a este respeito. Afinal, qual o peso que devemos atribuir ao argumento que apela à completude da LPOI para estabelecer a identidade como um noção lógica? A conclusão a ser estabelecida diz respeito à lógica ou à forma de se fazer lógica, atualmente? É interessante notarmos que a LPO, freqüentemente, é tratada como uma unidade autônoma à qual, em um estágio posterior de seu desenvolvimento, acrescentamos o predicado de identidade. No entanto, apelar para a completude da LPOI buscando estabelecer o caráter lógico da noção de *identidade* não parece ser a única estratégia possível.

Outra forma de interpretarmos esta situação seria defender a concepção de que a maneira de caracterizar a lógica atualmente, através da utilização de linguagens formalizadas, fornece uma impressão equivocada em relação a alguns de seus conceitos centrais. Realmente, ficaria muito difícil justificar qualquer definição de *noção lógica* que excluísse a identidade, e a razão para isso seria a de que a identidade é uma noção lógica por excelência e não o fato de alguma de suas propriedades poderem ser estudadas em um sistema que possui um

¹⁸ Ver o artigo de Chateaubriand e a conclusão do livro de Burgess & Rosen, citados na bibliografia.

procedimento de prova completo. A identidade é conceito constitutivo da lógica clássica e o fato da LPOI ser completa conta muito mais como uma razão para adotarmos um certo tipo de sistema formal que captura “adequadamente” a noção de consequência lógica, do que para estabelecermos a natureza lógica do predicado de identidade. Este tipo de consideração nos mostra como a conclusão estabelecida por Quine, a partir de certos resultados ligados aos formalismos, é passível de uma interpretação completamente diferente daquela pretendida pelo seu autor. Aliás, na argumentação de Quine, que pretende mostrar que as definições (1) e (2) são extensionalmente equivalentes, existe um problema envolvendo a identidade. Na demonstração de (A), o predicado de identidade não pode ser considerado uma noção lógica¹⁹. Afinal, a identidade pertence ou não ao âmbito da lógica?

Em relação à questão das verdades lógicas, a situação é igualmente confusa e isto por uma razão bastante específica: Quine tira conclusões a respeito da natureza das verdades lógicas a partir de considerações que envolvem, unicamente, a nossa maneira de caracterizá-las. Qual é, exatamente, o problema de termos pressupostos matemáticos em uma caracterização matemática da noção de *verdade lógica*? Ora, a própria argumentação de Quine, em um ponto central, pressupõe noções matemáticas. Como foi visto anteriormente, para estabelecer a equivalência entre (1) e (2) ele precisa utilizar os resultados (I), (II) e mais uma certa porção da aritmética elementar. O problema nos parece ser, então, o tipo de pressuposição matemática que pode ser utilizada no estudo da lógica. Esta questão nos remete, novamente, à *navalha de Ockham*. Para Quine, o que é indesejável na definição (2) é o apelo à noção de conjunto. No seu entender, uma caracterização que necessitasse somente do recurso às noções aritméticas seria mais vantajosa do ponto de vista conceitual. Será? Aqui temos

¹⁹ Boolos, em seu artigo “On Second-Order Logic”, chama a atenção para o fato de que se na fórmula $\exists x \exists y \neg(x = y)$ a identidade for considerada uma noção lógica não é possível estabelecer o teorema (A).

dois problemas, o primeiro de natureza ontológica e o segundo relacionado às conclusões estabelecidas em relação à natureza da lógica, a partir de sua caracterização matemática.

Quanto ao problema ontológico, novamente, a questão que se coloca diz respeito ao uso do princípio de parcimônia neste tipo de discussão. Qual o problema em utilizar a noção de conjunto para caracterizar as verdades lógicas? Ora, como foi assinalado a pouco, Quine, para estabelecer os seus resultados, necessita admitir uma certa porção da aritmética elementar sendo que esta teoria, por sua vez, pode ser reinterpretada como sendo uma parte da teoria de conjuntos, a saber, aquela que trata dos conjuntos finitos. Afinal, o problema que Quine coloca é em relação à noção de *conjunto* ou em relação à noção de *conjunto infinito*? Se a *navalha de Ockham* deve ser aplicada aos conjuntos infinitos, por que permitir a utilização do axioma do infinito²⁰ na metalinguagem para obter a completude da LPO? É claro que este tipo de objeção recoloca a polêmica em torno do *critério de compromisso ontológico*. É interessante notarmos que Carnap, por exemplo, no capítulo IV de *Meaning and Necessity* defende a postura de que a *navalha de Ockham* também deveria ser aplicada à metalinguagem. É evidente que não se trata de examinar aqui tal problema, mas esta consideração mostra que o raciocínio de Quine possui várias pressuposições extremamente problemáticas.

Em relação à utilização dos formalismos, nesta discussão a respeito da natureza da lógica, também há uma série de problemas que não são discutidos por Quine. O primeiro deles diz respeito a um privilégio injustificado dado às linguagens formais em questões envolvendo as principais noções lógicas. Por que, resultados que servem para caracterizar matematicamente as verdades lógicas devem desempenhar o papel de árbitros supremos na questão envolvendo a natureza da lógica? O que é importante perceber, neste tipo de discussão, é a quantidade de pressupostos filosóficos envolvidos no apelo a

²⁰ O axioma do infinito é o enunciado de ZFC que afirma a existência de pelo menos um conjunto infinito (ou, em linguagem simbólica $\exists x [\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)]$).

sistemas formais. Por exemplo, o recurso a linguagens formalizadas tem como consequência, na grande maioria dos casos, a aceitação do ponto de vista segundo o qual a sintaxe seria a dimensão fundamental da lógica. Ora, esta é uma concepção que deve ser examinada com cuidado pois, uma vez assumida, traz consigo uma série de desdobramentos para o problema filosófico a respeito da natureza das noções lógicas. Aliás, por que eleger a propriedade de completude e não a de decidibilidade, por exemplo, para traçar a linha divisória entre a lógica e a matemática? Não seria difícil vislumbrar um certo tipo de argumentação na qual a decidibilidade ocupasse um papel mais importante do que a completude no estudo dos sistemas lógicos²¹.

Neste ponto, a estratégia de Quine sofre de problemas semelhantes àqueles presentes no artigo de P. Benacerraf intitulado “What Numbers Could Not Be”. A principal tese a ser estabelecida por Benacerraf é a de que os números não poderiam ser objetos. A argumentação utilizada é a de que haveria várias representações conjuntísticas dos números naturais (a de Zermelo e a de von Neumann, por exemplo) e, no entanto, se o número 2, por exemplo, fosse um conjunto, ele teria que ser um conjunto determinado, o que não seria possível devido à existência destas várias caracterizações. Evidentemente que, em um certo sentido, a argumentação de Benacerraf se constitui em um *non sequitur*. Por que utilizar tal argumento para estabelecer algo a respeito dos números naturais e não para estabelecer certas limitações das representações

²¹ Em meus cursos introdutórios de lógica, por exemplo, após apresentar a lógica como a disciplina que distingue argumentos válidos dos inválidos, é visível o desconforto dos estudantes ao tomarem conhecimento de que ao contrário do cálculo sentencial, a LPO é indecidível. A eles pouco importa a completude da LPO que garante que se um argumento é válido ele pode ser obtido através das regras de dedução. Para eles o importante é a existência de um método efetivo para determinar se um argumento é válido ou não. Tendo tal caracterização da lógica presente, seria possível afirmar que o mal-estar sentido pelos alunos é completamente injustificado?

conjuntísticas da aritmética? Com Quine acontece algo semelhante. Por que as várias caracterizações matemáticas de verdade lógica devem jogar um papel tão decisivo quando se trata de determinar qual é o domínio da lógica? É claro que uma possível resposta a esta questão seria identificar a lógica com as suas representações matemáticas. Contudo, este parece ser um pressuposto muito forte para ser aceito e, no entanto, é o que Quine faz ao pressupor o caráter lingüístico da lógica. É evidente que ao assumirmos tal concepção, várias questões são decididas a seu respeito. Entretanto, esta não é, seguramente, uma boa estratégia para quem faz de seu objeto de investigação o problema a respeito da natureza da lógica.

A utilização do resultado de completude por Quine, é também bastante reveladora a este respeito. Afinal, o que afirma o teorema de completude da LPO? Uma, entre várias respostas aceitáveis, seria aquela que chama atenção para o fato de que, no âmbito da LPO, a noção de *conseqüência lógica* seria recursivamente caracterizável, revelando que, para um certo tipo de sistema, a completude permitiria que as principais noções da teoria de modelos fossem definíveis através do aparato da teoria das funções recursivas. No entanto, não é nada claro que tipo de conclusão é possível estabelecer a partir de tal fato sobre a natureza da lógica. A força da argumentação vai depender da nossa forma de entender, por exemplo, qual é o objeto de estudo de tal disciplina. Se a nossa concepção coloca a noção de *conseqüência lógica* como central, qual o peso que é possível atribuímos ao argumento de que a incompletude da LSO seria uma razão para descaracterizá-la como um sistema lógico? Por que não concluirmos que tal noção, no âmbito da LSO, é “muito forte” para receber uma caracterização sintática? Por que privilegiarmos a incompletude da LSO, para desqualificá-la como um sistema lógico, e não utilizarmos o fato de que somente com o seu auxílio a *lei de Leibniz*²² pode ser adequadamente expressa para classificá-la como um sistema pertencente ao âmbito da lógica?

²² Em linguagem simbólica: $\forall x \forall y [x = y \leftrightarrow \forall P (Px \leftrightarrow Py)]$.

Este é mais um exemplo de como este tipo de discussão pode ser inconclusiva quando os pressupostos filosóficos da utilização dos formalismos não são cuidadosamente examinados. É possível percebermos, na discussão de Quine, que a completude por si só não garante a sua concepção de lógica. O que estabelece o seu ponto de vista é a completude, acrescida da navalha de Ockham e da concepção lingüística de lógica²³. Assim, o que parece ser decidido através do apelo a um resultado técnico é na verdade um teorema matemático que encontra suporte em várias idéias filosóficas, as quais devem ter os seus pressupostos cuidadosamente examinados.

A utilização da noção de completude para distinguir a lógica da matemática é outro exemplo dos limites conceituais deste tipo de solução. Além de todos os problemas indicados anteriormente, a distinção feita por Quine vai contra fatos óbvios. É amplamente conhecido, por exemplo, o resultado estabelecido por Tarski, em 1951, de que a álgebra elementar é completa. Bem, segundo o critério de Quine teríamos que classificar a aritmética como parte da matemática e a álgebra não? Ou seria mais razoável estabelecer algum tipo de conclusão a respeito da capacidade de expressão da linguagem usada para estudar tal teoria matemática²⁴? Novamente é possível constatarmos a fragilidade de uma concepção que pretende ver no recurso aos formalismos uma forma de resolver problemas conceituais.

²³ Isto fica bastante claro quando se examina as duas últimas razões apresentadas por Quine para estabelecer que a identidade é uma noção lógica (ver nota 5).

²⁴ É somente através do recurso a este tipo de explicação que é possível entender por que a aritmética, que é parte da álgebra, é incompleta e esta última não. A diferença é que na linguagem utilizada na caracterização de \mathbb{R} não existem fórmulas de um certo tipo, o que faz com que nem tudo que é expresso utilizando a linguagem da aritmética possa ser expresso na linguagem da álgebra. É este fato que explica por que os resultados de Gödel e de Church-Rosser não podem ser aplicados ao sistema dos números reais.

A partir de tais considerações é possível perceber que as concepções apresentadas no livro *Philosophy of Logic* não resistem a uma análise mais rigorosa de vários de seus pressupostos filosóficos. Isto não significa afirmar que tais idéias não sejam esclarecedores. Na verdade, Quine tem o grande mérito de ter pensado sistematicamente sobre tais problemas de uma forma única, a partir da década de 60. O problema central de toda a argumentação examinada aqui é que Quine pretende resolver tecnicamente um problema que é de natureza conceitual. Este tipo de postura é possível de ser percebida na sua formulação do *critério de compromisso ontológico* no qual o apelo ao domínio das variáveis do sistema seria a forma mais adequada de verificar os pressupostos ontológicos de uma teoria. No entanto, a questão não é tão simples, o que torna bastante duvidoso o fato de que um problema deste tipo venha a receber uma solução como àquela pretendida com a formulação de tal critério. É claro que, através de sua discussão, Quine resgatou a “dignidade” do problema ontológico, tão desprestigiado pelos positivistas lógicos. No entanto, herdou deles uma abordagem técnica de lidar com problemas filosóficos, o que não funcionou no caso da ontologia e também não funciona no caso das verdades lógicas. Com tudo isso, não deixa de ser surpreendente que este estilo de fazer filosofia seja ainda hoje dominante entre os filósofos que trabalham com a filosofia da lógica e com a filosofia da matemática.

Abstract

In the book Philosophy of Logic Quine identifies logic with first-order logic and defends the conception that completeness is a necessary property of logical systems. The aim of this paper is to discuss Quine's argumentation and show that his ideas about the nature of logic have several conceptual and technical problems.

Referências Bibliográficas

- BENACERRAF, P. (1985). "What Numbers Could Not Be" In: BENACERRAF, P. e PUTNAM, H (eds.) *Philosophy of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 295-314.
- BOOLOS, G. (1975). "On Second-Order Logic". *The Journal of Philosophy*, 16: 509-527.
- _____. (1984). "To Be Is To Be a Value of a Variable (or To Be Some Values of Some Variables)". *The Journal of Philosophy*, 8: 327-449.
- _____. (1985). "Nominalist Platonism". *Philosophical Review*, 3: 327-344.
- BURGESS, J. P & ROSEN, G. (1999). *A Subject with no Object: Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.
- CARNAP, R. (1958). *Meaning and Necessity*. Chicago: The University of Chicago Press.
- CHATEAUBRIAND, O. (1990) "Ockham's Razor". *O Que Nos Faz Pensar*, 3: 51-75.
- CHIHARA, C. (1973) *Ontology and the Vicious-Circle Principle*. Ithaca and London: Cornell University Press.
- CRAIG, W. (1957). "Three Uses of the Herbrand-Gentzen Theorem". *Journal of Symbolic Logic*, 22: 269-285.
- HENKIN, L. (1961). "Some Remarks on Infinitely Long Formulas" In: *Infinitistic Methods* (proceedings of a Warsaw symposium), New York: Pergamon, pp. 167-183.
- QUINE, W. V. (1995). *Selected Logical Papers*. Cambridge: Harvard University Press.
- _____. (1985). *Methods of Logic*. Cambridge: Harvard University Press.
- _____. (1951). "Logic and Reification of Universals" In: *From a Logical Point of View*. Cambridge: Harvard University Press, 1980, pp. 102-30.
- _____. (1970). *Philosophy of Logic*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc.
- _____. (1969). *Ontological Relativity & Other Essays*. New York: Columbia University Press.

- KLEENE, S. C. (2000). *Introduction to Metamathematics*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
- KREISEL, G. (1950). "Note on Arithmetic Models for Consistent Formulae of the Predicate Calculus". *Fundamenta Mathematicae*, 37: 265-285.
- TARSKI, A. (1951). *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*. Berkeley and Los Angeles: University of California Press.
- WANG, H. (1951). "Arithmetic Models for Formal Systems". *Methodos*, 3: 217-232.