

# Semântica de Grafos para $CC\omega$

Giovanni da Silva de Queiroz<sup>1</sup>  
Maria Vilma Fernandes de Lucena<sup>2</sup>

## Resumo

Neste trabalho exploramos a dualidade entre lógicas paraconsistentes e lógicas intuicionistas, enfocando um cálculo proposto por Richard Sylvan em 1990, o cálculo  $CC\omega$ . Nós mostramos como é possível construir uma nova semântica, correta e completa, para este cálculo, baseada em grafos não reflexivos. Tal semântica propicia, ainda, que se esclareçam relações entre paraconsistência e intuicionismo. A definição de negação, em ambos os sistemas, joga um papel fundamental.

Palavras-chave: intuicionismo, paraconsistência, dualidade.

A dualidade entre sistemas paraconsistentes e sistemas intuicionistas tem sido tema recorrente na literatura, seja devido aos aspectos sintáticos, seja por motivações semânticas (ver, a propósito, [LdC84], [LdC86], [PRN89], [Syl90], [AlQ91], [SeC95], [Urb96]). Neste trabalho, nós exploramos esta dualidade, tomando em consideração um cálculo paraconsistente,  $CC\omega$ , proposto por Richard Sylvan; em seguida, nós estabelecemos outra semântica para  $CC\omega$ , baseada em grafos não reflexivos; na verdade, nós tomamos o reticulado dos sub-grafos de um dado grafo  $G$  e definimos as operações de união, interseção e complementação e as relacionamos com fórmulas na linguagem de  $CC\omega$ ; ao final, mostraremos como uma nova definição da operação de complementação no reticulado dos sub-grafos de um grafo dado, definição esta que se encontra em [ReZ96], pode servir

---

<sup>1</sup> Universidade Federal da Paraíba, Departamento de Filosofia.

<sup>2</sup> Universidade Federal da Paraíba, Departamento de Filosofia.

para lógicas intuicionistas, em particular a lógica proposta por Heyting, evidenciando, assim, a dualidade referida.

### I. O cálculo $CC_{\omega}$

Em [Syl90], Richard Sylvan propôs uma análise dos sistemas  $C_n$ ,  $1 \leq n \leq \omega$ , de da Costa [dCo93], relacionando-os a lógicas intuicionistas; segundo o autor, existe uma dualidade sintática entre ambos os sistemas, da seguinte maneira: enquanto o intuicionismo rejeita a lei do terceiro excluído ( $A \vee \neg A$ ) e afirma a não-contradição ( $\neg(A \wedge \neg A)$ ), os sistemas  $C_n$  geralmente afirmam a lei do terceiro excluído e rejeitam a não-contradição e, ainda, enquanto o intuicionismo afirma  $A \supset \neg\neg A$  e rejeita  $\neg\neg A \supset A$ , os sistemas de da Costa fazem justamente o contrário. Após mostrar como parece impossível prover todos os sistemas  $C_n$  de uma regra que garanta a substituição de equivalentes, Sylvan detém-se no cálculo  $C_{\omega}$  e obtém um outro cálculo, por ele chamado  $CC_{\omega}$  e que ele considera um “melhoramento” de  $C_{\omega}$ . A novidade é que  $CC_{\omega}$  continua um cálculo paraconsistente, no sentido de que não deriva todas as instâncias de Duns Scotus, isto é, não deriva esquemas da forma  $A \wedge \neg A \supset B$ , embora derive  $\neg(\neg A \wedge A)$  que, na formulação de da Costa, não deveria ser derivada em geral. Os critérios para se definir um cálculo como paraconsistente foram formulados por Newton C.A. da Costa, que é o pioneiro na construção de tais sistemas; em seu trabalho “Sistemas Formais Inconsistentes”, apresentado em 1963 (republicado em 1993, ver [dCo93]), ele propõe vários sistemas - em verdade, uma hierarquia deles - que podem servir de base a sistemas dedutivos inconsistentes satisfazendo as seguintes propriedades [Arr80]:

- I. Nestes sistemas, em geral, não é válido o esquema  $\neg(A \wedge \neg A)$ ;
- II. De duas proposições contraditórias, não se pode deduzir, em geral, qualquer proposição; (estamos identificando com este critério o esquema clássico Duns Scotus e todas os seus correlatos);

III. Nestes cálculos, são válidos todos os esquemas e regras da lógica clássica que não interfiram com as primeiras condições.

Embora  $CC\omega$  não satisfaça todos os critérios de da Costa, pode servir como lógica subjacente para teorias inconsistentes sem que se derive a trivialidade da teoria, o que nos parece motivação bastante para considerá-lo.

O cálculo  $CC\omega$  tem os seguintes axiomas:

- 1)  $A \supset (B \supset A)$
- 2)  $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$
- 3)  $(A \wedge B) \supset A$
- 4)  $(A \wedge B) \supset B$
- 5)  $A \supset (B \supset (A \wedge B))$
- 6)  $A \supset (A \vee B)$
- 7)  $B \supset (A \vee B)$
- 8)  $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$
- 9)  $A \vee \neg A$
- 10)  $\neg \neg A \supset A$

juntamente com as seguintes regras de inferência:

Regra *Modus Ponens*:  $A, A \supset B / B$

Regra RC:  $A \supset B / \neg B \supset \neg A$

Algumas observações:

1. Se acrescentarmos a  $CC\omega$  o esquema clássico  $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$  então  $CC\omega + (A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A) =$  lógica clássica, CL.
2.  $C\omega + (\neg A \supset \neg B) / B \supset A = CL$ .
3. A única diferença entre  $C\omega$  e  $CC\omega$  é a regra RC que, em virtude das observações acima, deve ser aplicada somente a teoremas.

Sylvan estende sua análise da dualidade ao domínio semântico. Enquanto a negação no intuicionismo é avaliada em termos de impossibilidade, como  $\neg\Diamond$ , uma regra dual analisaria a mesma como não-necessidade, portanto como  $\neg$ , isto é,  $\Diamond\neg$ . A analogia modal sugere uma regra de avaliação para a negação paraconsistente  $\neg$  da seguinte forma:  $I(\neg A, a) = 1$  se e somente se para algum  $b \in K$ ,  $Sab$  e  $I(A, b) = 0$ , e aqui  $S$  é uma

relação diádica num conjunto de mundos  $K$ , satisfazendo determinadas condições. A semântica dada para  $CC$  baseia-se em *estruturas de mundo* da forma  $M = (G, K, R)$ , na qual  $G \in K$  e  $R$  é uma relação de ordem sobre  $K$ . É definida uma *CC estrutura-modelo*  $M$  como uma estrutura  $(T, K, \leq, S)$  na qual  $T \in K$ ;  $\leq$  e  $S$  são relações diádicas sobre  $K$ , tal que a relação de ordem  $\leq$  é reflexiva e transitiva (e opcionalmente anti-simétrica), e a relação  $S$  satisfaz, universalmente, a seguinte condição (si): se  $a \leq c$  e  $Sab$  então  $Scb$ . Definidos os conceitos de valoração e interpretação na estrutura modelo  $M$  acima, são provados os teoremas de correção e completude.

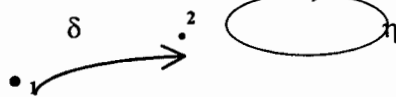
Nossa proposta é dar uma nova semântica para  $CC\omega$ , diferente da que foi apresentada por Sylvan. Consideramos que a condição (si), com o artifício da relação  $S$ , que não sabemos bem do que se trata, é pouco intuitiva e problemática. Pretendemos fornecer tal semântica, tomando como base não mais as estruturas de mundos possíveis, mas considerando grafos não reflexivos introduzidos em [Law91].

## II. Uma nova semântica

**Definição 1:** Um *grafo*  $G$  é um objeto da forma  $G = (G_0, G_1, i, f)$  no qual  $G_0$  e  $G_1$  são conjuntos;  $i, f$  são funções tais que  $i, f: G_1 \rightarrow G_0$ .

Podemos interpretar  $G_0$  como um conjunto de vértices;  $G_1$  como um conjunto de flechas orientadas;  $i$  e  $f$  indicam, respectivamente, o vértice inicial e o vértice final, em  $G_0$ .

**Exemplo 1:** Sejam  $G_0 = \{1, 2\}$ ,  $G_1 = \{\delta, \eta\}$ .



Pela definição,  $G = (\{1, 2\}, \{\delta, \eta\}, i, f)$ . Como  $i$  indica o vértice inicial e  $f$  indica o vértice final, então  $i(\delta) = 1$ ,  $f(\eta) = 2$ ,  $i(\eta) = f(\delta) = 2$ .

**Definição 2:** Um *sub-grafo*  $X$  de  $G$  é uma quádrupla  $X = (X_0, X_1, i, f)$  na qual  $X_0 \subseteq G_0$ ;  $X_1 \subseteq G_1$  e tal que toda flecha em  $X_1$  tem vértice inicial e final em  $X_0$ . Se  $X$  é sub-grafo de  $G$ , nós escrevemos  $X \subseteq G$ .

**Definição 3:** Sejam  $\alpha, \beta$  grafos. Então, a relação de ordem  $\leq$  é definida da seguinte maneira:  $\alpha \leq \beta$  se, e somente se,  $\alpha \subseteq \beta$ .

**Teorema 1:** A relação  $\leq$ , tal como definida acima, é uma relação de ordem parcial.

Prova: Devemos provar que  $\leq$ , definida como  $\subseteq$ , é uma relação de ordem parcial, isto é, uma relação reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

1)  $\leq$  é reflexiva: suponhamos que  $\neg (\alpha \subseteq \alpha)$ . Então,  $\neg (\alpha \subset \alpha$  ou  $\alpha = \alpha)$ , isto é,  $\neg (\alpha \subset \alpha)$  e  $\alpha \neq \alpha$ . O que é impossível. Logo,  $\alpha \subseteq \alpha$ . Por definição,  $\alpha \leq \alpha$ . Logo,  $\leq$ , como definida, é uma relação reflexiva.

2)  $\leq$  é anti-simétrica: devemos provar que se  $\alpha \leq \beta$  e  $\beta \leq \alpha$  então  $\alpha = \beta$ ; suponhamos (1) que  $\alpha \leq \beta$  e  $\beta \leq \alpha$  e suponhamos (2), também, que  $\alpha \neq \beta$ . De (1), por definição, temos  $\alpha \subseteq \beta$  e  $\beta \subseteq \alpha$ . De  $\alpha \subseteq \beta$ , obtemos que  $\alpha \subset \beta$  ou  $\alpha = \beta$ . Pela hipótese (2), concluímos que  $\alpha \subset \beta$ . De  $\beta \subseteq \alpha$ , pelo mesmo raciocínio, obtemos que  $\beta \subset \alpha$ . Logo, de  $\alpha \subset \beta$  e  $\beta \subset \alpha$ , temos que  $\alpha = \beta$ , contradizendo a hipótese (2). Logo,  $\alpha = \beta$  e, portanto, a relação  $\leq$ , como definida, é anti-simétrica.

3)  $\leq$  é transitiva: devemos provar que se  $\alpha \leq \beta$  e  $\beta \leq \gamma$  então  $\alpha \leq \gamma$ ; suponhamos que  $\alpha \leq \beta$  e  $\beta \leq \gamma$ . Por definição,  $\alpha \subseteq \beta$  e  $\beta \subseteq \gamma$ . Suponhamos também que,  $\neg (\alpha \leq \gamma)$ , que por definição é,  $\neg (\alpha \subseteq \gamma)$ , isto é,  $\neg (\alpha \subset \gamma$  ou  $\alpha = \gamma)$ , ou seja,  $\neg (\alpha \subset \gamma)$  e  $\alpha \neq \gamma$ . Deste último, temos que  $\exists x (x \in \alpha$  e  $x \notin \gamma)$ . Por  $\exists$ -eliminação, para um determinado elemento  $c$ ,  $c \in \alpha$  e  $c \notin \gamma$ . De  $\alpha \subseteq \beta$ , temos que  $\alpha \subset \beta$  ou  $\alpha = \beta$ . Dois casos a considerar: (1) se  $\alpha \subset \beta$ , então como  $c \in \alpha$ , temos que  $c \in \beta$ . (2) se  $\alpha = \beta$ , como  $c \in \alpha$ , por

substituição,  $c \in \beta$ . Em qualquer caso  $c \in \beta$ . De  $\beta \subseteq \gamma$ , temos também dois casos: (1) se  $\beta \subset \gamma$ , como  $c \notin \gamma$ , temos que  $c \notin \beta$ . (2) se  $\beta = \gamma$ , por substituição,  $c \in \beta$ . Em qualquer caso,  $c \in \beta$ . Logo,  $c \in \beta$  e  $c \notin \beta$ , o que é impossível. Logo,  $\alpha \leq \gamma$ . Provamos então que a relação  $\leq$ , definida como  $\subseteq$ , é transitiva.

Por (1), (2), (3), concluímos que a relação  $\leq$ , como definida, é uma relação de ordem parcial.

**Teorema 2:** O conjunto de todos os sub-grafos de um grafo  $G$  qualquer,  $P(G)$ , forma um reticulado sob a relação  $\leq$ .

Prova: Seja  $P(G)$  o conjunto de todos os sub-grafos de  $G$ . Sejam  $\cap$  e  $\cup$  as operações usuais de teorias de conjuntos; se  $X$  e  $Y$  são sub-grafos de  $G$ ,  $X \cap Y = (\{X_0 \cap Y_0\}, \{X_1 \cap Y_1\}, i, f)$  e  $X \cup Y = (\{X_0 \cup Y_0\}, \{X_1 \cup Y_1\}, i, f)$ . Definidas tais operações,  $\langle P(G), \leq \rangle$  (ou, alternativamente,  $\langle P(G), \cap, \cup \rangle$ ) forma um reticulado.

**Definição 4 :** Considere, agora, a estrutura  $KG = \langle P(G), \leq, \nu \rangle$ , na qual  $P(G)$  é um reticulado (o conjunto de todos os sub-grafos de  $G$ ),  $\leq$  é a relação já definida e  $\nu$  é uma função tal que  $\nu$ : FOR  $\Rightarrow P(G)$ , com FOR o conjunto das fórmulas de  $CC\omega$ . Para elementos  $g(A)$ ,  $g(B)$ ,  $g(C)$  de  $PG$ , isto é, sub-grafos de  $G$ , a estrutura  $KG$  satisfaz, ainda, as seguintes condições:

1.  $\nu(A) = g(A)$ , se  $A$  é uma fórmula atômica.
2.  $\nu(A \wedge B) = g(A) \cap g(B)$ .
3.  $\nu(A \vee B) = g(A) \cup g(B)$ .
4.  $\nu(A \supset B) = \sup \{g(C) \text{ tal que } g(C) \wedge g(A) \leq g(B)\}$ .
5.  $\nu(\neg A) = \text{menor sub-grafo } g(B)$ , de  $G$ , tal que  $g(B) \cup g(A) = G$ , ou seja,  $\inf \{g(B)$ , tal que  $g(B) \cup g(A) = G\}$ .

**Observação:** Nós exigimos, conforme definição 2, num sub-grafo, que toda flecha tenha vértices, inicial e final, bem definidos. Note ainda que se  $g(A) \leq g(B)$ , então  $\nu(A \supset B) = G$ .

**Definição 5:** Uma fórmula bem formada (fbf)  $A$  de  $CC\omega$  é verdadeira numa estrutura  $KG$  se, e somente se,  $v(A) = G$ .

**Definição 6:** Uma fbf  $A$  de  $CC\omega$  é válida se, e somente se, para qualquer estrutura  $KG$ ,  $v(A) = G$ .

**Teorema 3 (Correção):** Todo teorema de  $CC\omega$  é uma fórmula válida.

Prova: Devemos provar que, dada qualquer fbf  $A$  de  $CC\omega$ , se  $A$  for um teorema de  $CC\omega$ , então  $A$  é uma fbf válida. A prova é feita por indução em teoremas, isto é, vamos provar: 1) Todos os postulados de  $CC\omega$  são fbfs válidas de  $CC\omega$ ; 2) As regras *Modus Ponens* e *RC* preservam validade.

Provando, agora, o item (1), para alguns postulados:

(P1)  $A \supset (B \supset A)$

Prova: Suponhamos que exista uma estrutura  $KG$  na qual  $v(A \supset (B \supset A)) \neq G$ . Então não ocorre que  $g(A) \leq g(B \supset A)$ . Isto é, não ocorre que  $g(A) \leq (g(B) \leq g(A))$ . Mas, isto é impossível. Logo,  $v(A \supset (B \supset A)) = G$  para toda estrutura  $KG$  e, portanto,  $A \supset (B \supset A)$  é uma fbf válida de  $CC\omega$ .

(P3)  $(A \wedge B) \supset A$

Prova: Suponhamos que exista uma estrutura  $KG$  na qual  $v((A \wedge B) \supset A) \neq G$ . Então, não ocorre que  $g(A \wedge B) \leq g(A)$ , isto é, não ocorre que  $(g(A) \wedge g(B)) \leq g(A)$ , o que é impossível. Logo,  $v((A \wedge B) \supset A) = G$  para toda estrutura  $KG$  e, portanto,  $(A \wedge B) \supset A$  é uma fbf válida de  $CC\omega$ .

(P9)  $A \vee \neg A$

Prova: Imediata, a partir da definição de  $v(\neg A)$ .

(P10)  $\neg\neg A \supset A$

Prova: Suponhamos que exista uma estrutura KG, na qual  $v(\neg\neg A \supset A) \neq G$ . Então, não ocorre que  $g(\neg\neg A) \leq g(A)$ . Mas,  $g(\neg\neg A) =$  menor sub-grafo  $g(B)$  tal que  $g(B) \cup g(\neg A) = G$ ; pela prova de (P9), acima,  $g(B) = g(A)$ . Logo,  $v(\neg\neg A \supset A) = G$ , para toda KG e, assim,  $\neg\neg A \supset A$  é uma fbf válida de  $CC\omega$ .

(2) Para as regras, consideremos o seguinte:

Regra *Modus Ponens*. Suponhamos que MP não preserve validade. Então,  $A$  e  $A \supset B$  são fbfs válidas de  $CC\omega$ , mas  $B$  não é válida. Deste último fato, temos que existe uma estrutura KG na qual  $B$  não é verdadeira. Então  $v(B) \neq G$ . Mas  $A$  e  $A \supset B$  são verdadeiras em qualquer estrutura KG. Logo,  $v(A) = G$  e  $v(A \supset B) = G$ . Deste último fato,  $g(A) \leq g(B)$ . Logo  $v(B) = G$ , o que é uma contradição com a hipótese.

Regra RC: Suponhamos (1) que  $A \supset B$  seja uma fbf válida de  $CC\omega$ . Então  $v(A \supset B) = G$  para toda estrutura KG. Suponhamos, também (2), que  $\neg B$  seja uma fbf válida, logo  $v(\neg B) = G$  para toda estrutura KG, e que  $v(\neg A) \neq G$ . Mas, dado que  $g(A) \leq g(B)$ , segue-se que  $\neg g(B) \leq \neg g(A)$ ; assim,  $g(\neg B) \leq g(\neg A)$  e, portanto,  $G \leq g(\neg A)$ , o que contraria a hipótese (2); logo  $g(\neg B \supset \neg A) = G$ .

Fica então provado o Teorema da Correção.

#### Algumas observações:

1. Na prova de que a regra RC preserva validade, utilizamos o fato de que  $g(\neg A) = \neg g(A)$ , cuja prova é imediata do item 5 da definição 4.



2. Existem estruturas KG tais que não são válidos os seguintes esquemas:  $A \wedge \neg A \supset B$  e  $A \supset \neg \neg A$ :

a) Seja o exemplo 1 dado anteriormente e tomemos  $P(G)$ , o conjunto de todos os subconjuntos do grafo  $G$ . Consideremos o sub-grafo  $X_1$  dado por  $(\{1,2\}, \{\delta\}, i, f)$ ; o menor sub-grafo  $g$ , de  $G$ , tal que  $X_1 \cup g = G$  é o sub-grafo  $X_2$  dado por  $(\{2\}, \{\eta\}, i, f)$ ; assim,  $X_2 = c(X_1)$ ; mas, observe-se que  $X_1 \cap X_2$  é o sub-grafo dado por  $(\{2\}, \emptyset, i, f) \neq \emptyset$ ; note que esta possibilidade não está excluída de nossa definição 1, pois ali se exigiu que toda flecha em  $G_0$  tivesse vértice inicial e vértice final em  $G_1$ . Pontos isolados são também sub-grafos. Portanto, existem estruturas KG tais que, dado um sub-grafo  $g$ ,  $g \cap \neg g \neq \emptyset$ ; assim, Duns Scotus, e seus correlatos, não são válidos.

b) Tomemos, agora, os pontos isolados 1 e 2, ou seja, o sub-grafo  $p = (\{1,2\}, \emptyset, i, f)$ ; seu complementar é o próprio sub-grafo  $G$  e o complementar de  $G$ , em  $P(G)$ , é o sub-grafo vazio; assim, não ocorre que  $p \leq \neg \neg p$ .

**Definição 7**: Uma *álgebra brouweriana* é uma estrutura  $\langle A, \cap, \cup, \neg, T \rangle$  tal que:

- 1)  $\langle A, \cap, \cup \rangle$  é um reticulado com elemento unitário  $T$ ;
- 2)  $A$  é fechado sob  $\neg$ ;
- 3) Para todo  $a, b, c \in A$ ,  $a \neg b \leq c$  se, e somente se,  $a \leq b \cup c$ .

**Teorema 4**: O reticulado dos sub-grafos de um grafo dado forma uma álgebra brouweriana.

Prova: Ver [ReZ96: 29].

**Observação**: Álgebras brouwerianas foram introduzidas por McKinsey e Tarski [McT46] e se revelam adequadas para o estudo de lógicas paraconsistentes [SAQ97]. Em Reyes e Zolfaghari [ReZ96] estão definidas álgebras *co-Heyting* como álgebras duais das álgebras de Heyting; álgebras *co-Heyting* permitem que seja definida uma operação dual da operação " $\rightarrow$ " das álgebras de Heyting; esta operação, que os autores

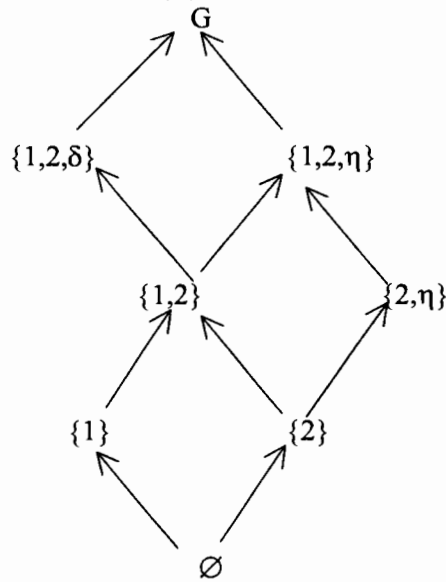
chamam de “subtração”, é estabelecida para reticulados distributivos limitados  $L$ , da seguinte maneira:  $\setminus : L \times L \longrightarrow L$  e deve satisfazer a condição de que  $x \setminus y \leq z$  se e somente se  $x \leq y \vee z$ . Esta última é a definição da operação “pseudo-diferença”:  $-$ , introduzida por Tarski no trabalho referido.

**Teorema 5 (Completeness):** Toda fórmula válida  $A$  é um teorema de  $CC\omega$ .

Prova: Se  $A$  não é teorema de  $CC\omega$ , então existe uma estrutura  $KG$  tal que  $v(A) \neq G$  nesta estrutura e, portanto,  $A$  não é válida.

### III. Sobre as relações entre paraconsistência e intuicionismo

Poderíamos definir, tal como em [ReZ96], um grafo como um conjunto com dois tipos de elementos estruturados, flechas e vértices, obtidos pelas relações internas dadas pelas funções  $i$  e  $f$ . Tal procedimento simplificaria a notação e as relações entre o grafo  $G$  e seus sub-grafos. O exemplo 1 seria, então, escrito como o conjunto  $G = \{1, 2, \delta, \eta\}$ . Teríamos, então, o seguinte reticulado  $P(G)$ .



Os sub-grafos das observações (a) e (b) do item 2, após o teorema 3, seriam, simplesmente, os conjuntos  $X_1 = \{1, 2, \delta\}$ ,  $X_2 = \{2, \eta\}$ ,  $X_3 = \{1, 2\}$  e os conjuntos  $G$  e o vazio. O problema de se tomar sub-grafos como conjuntos desse tipo está em que, ao se estabelecer a operação de complementação, da teoria dos conjuntos, é necessário fazer uma determinada escolha, pois o complemento de  $X$ ,  $c(X)$ , em geral, não é um grafo. Por exemplo, o complemento de  $X_1$ , nesta notação, é o conjunto  $\{\eta\}$ , que não é um grafo, pois foi exigido que toda flecha tivesse vértice inicial e vértice final no conjunto dos vértices. Por isso, tomamos como complemento de  $X_1$ , em nossa discussão após o teorema 3, a quádrupla  $(\{2\}, \{\eta\}, i, f)$  que é equivalente, nesta nova notação, ao conjunto  $\{2, \eta\}$  - este, é um grafo, conforme exige a definição. Mas era possível outro caminho para se pensar a operação de complementação. O caminho que tomamos foi o de “completar” o complemento para satisfazer a definição; se, ao invés disso, tivéssemos “descartado” o complementar “problemático” (esta noção se encontra em [ReZ96], página 30), obteríamos outra negação que, entretanto, não mais se prestava para lógicas paraconsistentes. Apenas como exemplo, esta nova possibilidade nos obrigava a tomar como o conjunto complementar de  $X_1$  o conjunto vazio. Isso pode ser feito formalmente, como a seguir.

A condição 5 da definição 4, na qual foi dada a condição da avaliação da negação, poderia ser modificada para a seguinte:

5I.  $v(\neg A) = \text{maior sub-grafo } g(B)$ , de  $G$ , tal que  $g(B) \cap g(A) = \emptyset$ , ou seja,  $\sup \{g(B), \text{ tal que } g(B) \cap g(A) = \emptyset\}$ .

Neste caso, então, não mais se teria uma semântica para  $CC\omega$ , mas uma semântica para o cálculo intuicionista de Heyting. Com efeito, note-se que, agora, valem os seguintes esquemas:  $A \wedge \neg A \supset B$ ; pois,  $X_1 (= \{1, 2, \delta\}) \cap c(X_1) = \emptyset$  e, portanto, valem Duns Scotus e seus correlatos; por sua vez

$X_1 \cup c(X_1) \neq G$ , o que mostra que não vale a lei do terceiro excluído.

O exemplo acima, desta vez tendo por base grafos não reflexivos, leva-nos a reafirmar que lógicas paraconsistentes e lógicas intuicionistas estão intimamente conectadas, tendo suas diferenças explicitadas na definição de negação; observe, a propósito, que as duas avaliações estabelecidas para negações –  $\bar{\cdot}$  e  $\bar{\cdot}^I$  – gozam das seguintes diferenças: aquilo que, na avaliação da negação paraconsistente, é definido mediante a operação  $\inf$ , a operação união, e o elemento  $G$  do reticulado  $P(G)$ , na avaliação da negação intuicionista, é definido mediante o  $\sup$ , a operação interseção e o elemento  $\emptyset$  do reticulado  $P(G)$ . As condições  $\bar{\cdot}$  e  $\bar{\cdot}^I$  são, nesse sentido, duais.

### **Abstract**

In this paper we explore the duality between paraconsistent and intuitionistic logics, by taking in account a calculus proposed by Richard Sylvan in 1990, the logical system  $CC\omega$ . We show how it is possible to build a new semantics, which is sound and complete, for that calculus. This semantics is based in non-reflexive graphs. Such semantics still shows some relationships between paraconsistency and intuitionism. The definition of negation, in both systems, plays a fundamental role.

Key words: intuitionism, paraconsistency, duality.

### **Bibliografia**

- [AlQ91] Alves, E.H. e G.S.Queiroz . “The construction of the calculi  $C_n$  of da Costa”, *The Journal of Non-Classical Logic*, 8 (1991), p.67-78.
- [Arr80] Arruda, A.I. “A survey of paraconsistent logic” in A. I. Arruda, N. C. A. da Costa, R. Chuaqui (eds.). **Mathematical Logic in Latin America**. Amsterdam: North-Holland, 1980, p.1-41.
- [dCo93] Costa, N.C.A da . **Sistemas Formais Inconsistentes**. Curitiba: Ed. da UFPR, 1993.

- [Law91] Lawvere, F.W. "Intrinsic co-Heyting boundaries and the Leibniz rule in certain toposes", *Lecture Notes in Mathematics*, 1488 (1991), p. 279-281.
- [LdC84] Loparic, A. e N.C.A.da Costa. "Paraconsistency, paracompleteness and valuations", *Logique et Analyse*, 106 (1984), p.119-131.
- [LdC86] Loparic, A. e N.C.A.da Costa. "Paraconsistency, paracompleteness and induction", *Logique et Analyse*, 113 (1986), p.73-80.
- [McT46] McKinsey, J.C.C. e A. Tarski. "On closed elements in closure algebras", *Annals of Mathematics*, 47 (1946), p.122-162.
- [ReZ96] Reyes, G. e H. Zolfaghari. "Bi-Heyting algebras, toposes and modalities", *Journal of Philosophical Logic*, 25 (1996), p.25-43.
- [SeC85] Sette, A. M. e W. A. Carnielli. "Maximal weakly-intuitionistic logics", *Studia Logica*, 55(1995), p.181-203.
- [SAQ97] Queiroz, G.S., Sette, A.M. e Alves, E.H. "Brouwerian Algebras and Paraconsistent Logic", *Logic Journal of the IGPL*, vol.5, n° 3 (1997), p.467.
- [Syl90] Sylvan, R. "Variations on da Costa C systems and dual-intuitionistic logic.I. Analyses of C and CC ", *Studia Logica*, 49(1990). p.47-65.
- [Urb96] Urbas, I. "Dual-intuitionistic logics", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol.37 (1996), p.440-451.