Sobre a Classificação de Triângulos Pitagóricos

John A. Fossa[1]
Glenn W. Erickson[2]

A matemática grega antiga conhecia duas fórmulas para triângulos pitagóricos[3]. No presente trabalho, analisaremos estas fórmulas do ponto de vista da álgebra retórica (entendida como a álgebra não simbólica, expressa discursivamente), mostraremos como elas poderiam ter sido derivadas do algorítmo babilônico para a geração de triângulos pitagóricos, e sugeriremos razões pelas quais os pitagóricos e acadêmicos se interessaram por triângulos gerados pelas respectivas fórmulas. Num trabalho subseqüente, analisaremos as fórmulas do ponto de vista da técnica das diferenças das diferenças.[4]

A primeira das referidas fórmulas, a Fórmula de Pitágoras, afirma que $(n, \frac{1}{2}(n^2-1), \frac{1}{2}(n^2+1))$ é um terno pitagórico sempre que *n* é um inteiro ímpar maior ou igual a 3. De fato, desde que $\frac{1}{2}(n^2+1) - \frac{1}{2}(n^2-1) = 1$, os triângulos obtidos usando esta fórmula são todos pitagóricos primitivos. A segunda, a Formula de Platão, afirma que $(2n, n^2-1, n^2+1)$ é um terno pitagórico sempre que *n* é inteiro e maior ou igual a 2. Aqui, $n^2+1 - (n^2-1) = 2$; assim, os triângulos obtidos são ou primitivos ou o dobro de um primitivo. HEATH (1981, v.1, p. 79-82) especula que as fórmulas foram obtidas através de investigações sobre números figurados. A especulação é atraente, porque, de fato, sabemos que os primeiros pitagóricos

---

[1] Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Matemática.
[2] Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Filosofia.
[3] Para os conceitos básicos não definidos no texto, ver FOSSA e ERICKSON (1997).
[4] Ver o último capítulo de ERICKSON e FOSSA (2001).

estudaram números figurados extensivamente. Listamos os primeiros dez ternos gerados pelas duas fórmulas:

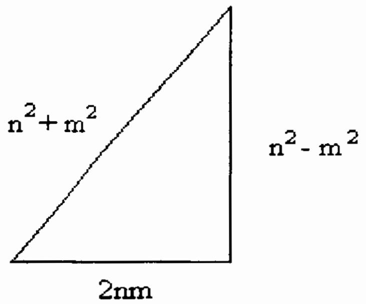
Fórmula de Pitágoras	Fórmula de Platão
(3, 4, 5)	(4, 3, 5)
(5, 12, 13)	(6, 8, 10) = 2×(3, 4, 5)
(7, 24, 25)	(8, 15, 17)
(9, 40, 41)	(10, 24, 26) = 2×(5, 12, 13)
(11, 60, 61)	(12, 35, 37)
(13, 84, 85)	(14, 48, 50) = 2×(7,24, 25)
(15 112, 113)	(16, 63, 65)
(17, 144, 145)	(18, 80, 82) = 2×(9, 40, 41)
(19, 180, 181)	(20, 99, 101)
(21, 220,221)	(22, 120, 122) = 2×(11, 60, 61)

Em cada uma das duas fórmulas, apresentam-se certas regularidades formidáveis. Mais notavelmente, os triângulos gerados pela Fórmula de Pitagóras têm os números masculinos (ímpares), dispostos em ordem consecutiva, no primeiro cateto, enquanto os gerados pela Fórmula de Platão têm os femininos (pares) dispostos de modo análogo (embora, nota-se, 1 não aparece na primeira seqüência e 2 não aparece na segunda). Como já vimos, todos os ternos gerados pela Fórmula de Pitágoras são primitivos. Os gerados pela Fórmula de Platão se alternam entre um primitivo e o dobro de um primitivo; além disso, o dobro é sempre o dobro de um primitivo gerado pela Fórmula de Pitágoras. Do ponto de vista geométrico, tudo que é gerado pela Fórmula de Pitágoras é gerado (inclusive semelhança) pela fórmula de Platão. De fato, seria muito fácil recuperar os triângulos primitivos dos dobros; bastaria bissectar um cateto e traçar uma perpendicular ao cateto neste ponto, indo até a hipotenusa. Os antigos provavelmente pensavam que a Fórmula de Platão gerava duas vezes o número de triângulos gerados pela Fórmula de Pitágoras.

Há ainda um fato muito curioso que pode nos ajudar a colocar as duas fórmulas em perspectiva. As fórmulas, mesmo em conjunção, não geram todos os triângulos pitagóricos primitivos. Muito antes do tempo de Pitágoras, porém, os Babilônios conheciam uma fórmula, paramétrica como as duas fórmulas gregas, que gera todos os ternos pitagóricos primitivos. Mas, desde que uma das principais fontes da matemática grega era precisamente a matemática babilônica, é altamente inverosímil que os gregos não conheceram a fórmula babilônica. Concluímos, então, que as duas fórmulas gregas não foram uma descoberta independente (e menos sofisticada) da fórmula babilônica, mas que foram derivadas desta, de alguma forma, para fins de destacar os triângulos assim gerados. Mais adiante tentaremos vislumbrar as razões que poderiam ter induzido os pitagóricos e os acadêmicos a destacar estas duas seqüências de triângulos. Antes, porém, voltamos a nossa atenção à fórmula babilônica.

Os babilônios usaram a fórmula ($2nm$, n^2-m^2, n^2+m^2) onde $n>m$ (Fig. 1). O terno produzido por esta fórmula é primitivo quando *n* e *m* são primos entre si, isto é, quando o máximo divisor comum de *n* e *m* é 1. Ainda mais importante, esta fórmula gera *todos* os triângulos pitagóricos primitivos.

Fig. 1.



Quais são as relações entre estas três fórmulas? Parece óbvio que a fórmula de Platão é simplesmente duas vezes a fórmula de Pitágoras; também a fórmula de Platão é um caso especial da fórmula babilônica, pondo m=1. No entanto, devemos ter um pouco de cautela aqui porque os antigos não tiveram uma álgebra simbólica e, conseqüentemente, não é claro que estas relações seriam percebidas na gênese das fórmulas gregas. Há ainda outro problema: na fórmula de Pitágoras temos a restrição de que *n* deve ser ímpar, enquanto esta restrição não se aplica à fórmula de Platão; é por isto que a fórmula de Platão aparentemente gera duas vezes o número de triângulos que a fórmula de Pitágoras. Ainda mais, a fórmula de Platão parece ser uma resposta à fórmula de Pitágoras, o que indica que não é uma conseqüência direta da fórmula babilônica. Então, qual a relação entre a fórmula de Pitágoras e a fórmula babilônica?

A sugestão de HEATH (1981, v. 1, p.80), à qual aludimos acima, é que Pitágoras[5] notou que o *gnomon* de um quadrado é sempre o ímpar 2k+1. Ele então teria procurado os casos em que o *gnomon* é um quadrado perfeito, ou seja, $2k+1=n^2$. Resolvendo para k, ele teria percebido a relação $n^2 + (\frac{1}{2}(n^2-1))^2 = (\frac{1}{2}(n^2+1))^2$. A palavra "resolvendo" na sentença anterior deveria ser entendida de maneira a não implicar em manipulação de formulações algébricas simbólicas e, com esta restrição, a sugestão de Heath é plausível. Uma vez que reconhecemos que Pitágoras conhecia a fórmula babilônica, porém, há uma alternativa, que apresentaremos a seguir.

Lembramos que a fórmula babilônica gera triângulos pitagóricos primitivos quando *n* e *m* são primos entre si. Assim, o problema de achar todos os ternos pitagóricos primitivos se reduz ao problema de achar todos os pares de números naturais (n, m) que são primos entre si. Dito de uma forma ligeiramente diferente, é mister achar uma maneira sistemática de exibir as razões irredutíveis n:m com n>m. Notamos que a descoberta de que as concordâncias musicais têm esta forma (oitavo 2:1, quinta 3:2, quarta 4:3 e tom 9:8) era uma descoberta de Pitágoras e, portanto, os pitagóricos tiveram interesse neste tipo de razão para razões independentes. Uma maneira de achar estas razões seria simplesmente verificar a divisão de *n* e *m* por todos os números naturais menores ou iguais a *m*. Isto implica em 2m divisões para cada razão n:m. O trabalho poderia ser

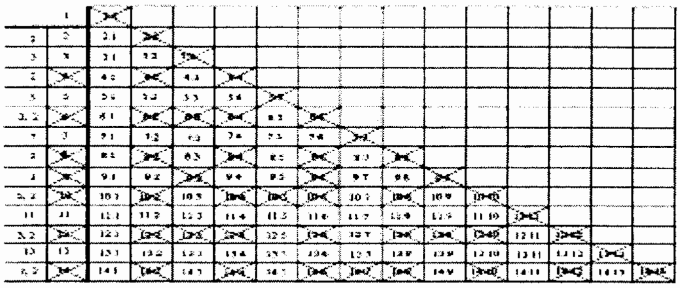
[5] Usaremos "Pitágoras" como designação conveniente para "Pitágoras e/ou os primeiros pitagóricos" e "Platão" para "Platão e/ou os primeiros acadêmicos".

reduzido dividindo-se apenas pelos números primos menores ou iguais a *m*; eventualmente se perceberia que só seria necessário dividir pelos primos menores ou iguais à $\sqrt{m}$. Mesmo assim, a tarefa seria enorme, especialmente quando lembramos que o sistema de numeração dos antigos não facilitava tais cálculos.

No procedimento descrito no parágrafo anterior, ainda há os seguintes dois subproblemas: (i) seria necessário sistematizar a apresentação das razões n:m para ter certeza que nenhuma fosse esquecida e (ii) seria necessário achar uma maneira de exibir os números primos. Há uma maneira muito simples de achar qualquer segmento inicial de primos, porém, e, como veremos, ela pode ser modificada para achar as razões irredutíveis. O método é chamado o Crivo de Eratóstenes por ser atribuído a este matemático, contemporâneo de Arquimedes. O método parece muito com um simples fluxo aritmético e, portanto, provavelmente tem uma origem pitagórica. Listamos em ordem os naturais até qualquer determinado número N. No primeiro estágio, eliminamos cada segundo número depois de 2. O primeiro número depois de dois que não foi eliminado é 3; assim, eliminamos cada terceiro número depois de 3. Continuamos eliminando cada p-ésimo número depois de *p*, onde *p* é o primeiro número que não foi eliminado no estágio anterior. Os números que restam são todos os primos menores ou iguais a N. Uma palavra de cautela: em cada estágio, eliminamos cada p-ésimo número depois de *p*, não cada p-ésimo número restante – isto é, embora um número seja "eliminado" ele continua a ocupar sua posição nas contagens subseqüentes.

O método pode ser facilmente adaptado para achar as razões irredutíveis. Simplesmente listamos (Fig. 2) os valores de *n* em uma coluna e, para cada *n*, listamos as razões de n:1 até n:n (alternativamente até n:n-1). Desta forma, temos uma listagem sistemática das n:m, o que resolve o primeiro subproblema mencionado acima. Em seguida, fazemos um crivo na coluna dos *n*. Na Figura 2, listamos os números *p* que eliminam cada *n* em uma coluna à esquerda do *n*. Em efeito, temos identificado os fatores primos de cada *n*. Finalmente, eliminamos cada p-ésima razão em uma linha em que *p* aparece na coluna da esquerda.

Fig. 2



Ilustramos o procedimento, o que poderia ser chamado de Crivo Duplo, na linha seis da Fig. 2. Na coluna dos n, eliminamos cada segundo número depois de dois, ou seja, 4, 6, 8, 10, *etc.* Notamos 2 na coluna à esquerda de 6. No próximo estágio, eliminamos cada terceiro número depois de 3, ou seja, 6, 9, 12, *etc.* Anotamos 3 na coluna à esquerda de 6. Em seguida, eliminamos cada quinto número depois de 5; mas 6 não é um quinto número depois de 5 (é o primeiro número depois de 5). Logo, *não* anotamos 5 na coluna à esquerda de 6. Finalmente, desde que 2 e 3 aparecem na coluna à esquerda de 6, eliminamos cada segunda razão (6:2,6:4, e 6:6) e cada terceira razão (6:3 e 6:6) nesta linha. As razões restantes (6:1 e 6:5) são as razões irredutíveis da sexta linha.

A descrição do procedimento poderia ser simplificada por se falar em "múltiplos" ("eliminar todos os múltiplos de 2" em vez de "eliminar cada segundo número depois de 2"). Rejeitamos a descrição mais simples, porém, para sublinhar um ponto muito importante: tanto o Crivo de Eratóstenes, quanto o Crivo Duplo, não dependem da multiplicação. Basta contar. Assim, é consonante com a hipótese de que era um método conhecido muito cedo na história da matemática.

Voltando à Figura 2, vemos num relance que as razões correspondentes às concordâncias musicais aparecem todas na mesma diagonal, a diagonal em que n-m=1. Poderíamos dividir a Figura 2 em classes diferentes, a p-ésima classe correspondendo à p-ésima diagonal da Figura (descartamos a diagonal em que n=m, pois esta não tem interesse para o problema proposto). Assim, n:m pertence à p-ésima classe se e somente se n-m=p.

Notamos que em termos modernos, temos um resultado muito interessante, pois temos uma partição (definida como uma coleção de subconjuntos disjuntos cuja união é o conjunto original) das razões e/ou das razões primas entre si. De fato, sejam $R = \{n:m/\ n, m \in N \text{ com } n>m\}$ e $RP = \{n:m/\ n, m \in N \text{ com } n>m \text{ e } (n, m)=1\}$. Seja n:m~a:b quando n-m=a-b. Então ~ é uma relação de equivalência que gera as classes de equivalência $R_p = \{n:m \in R/\ n\text{-}m=p\}$ em R e $RP_p = \{n:m \in RP/\ n\text{-}m=p\}$ em RP. Em todos os dois casos, a partição é infinita.

Voltando mais uma vez à Figura 2, vemos que só a primeira classe (p=1), a classe contendo as concordâncias musicais, é composta exclusivamente de razões irredutíveis. Desta forma, esta classe se destaca como sendo de importância especial. Quais são os triângulos pitagóricos gerados pelos valores de *n* e *m* desta classe? São, de fato, exatamente os triângulos dados pela fórmula de Pitágoras, como podemos ver na seguinte tabela:

n	m	terno gerado
2	1	(3, 4, 5)
3	2	(5, 12, 13)
4	3	(7, 24, 25)
5	4	(9, 40, 41)
6	5	(11, 60, 61)
7	6	(13, 84, 85)
8	7	(15 112, 113)
9	8	(17, 144, 145)
10	9	(19, 180, 181)
11	10	(21, 220,221)

Pitágoras, investigando estes triângulos, iria notar com muita facilidade que o cateto masculino é a soma dos geradores *n* e *m* (2+1=3, 3+2=5, 4+3=7, *etc.*). Também teria notado que o quadrado do cateto masculino é a soma do cateto feminino e a hipotenusa (3^2=4+5, 5^2=12+13, 7^2=24+25, *etc.*). Mas, a hipotenusa é um a mais do que o cateto feminino. Assim, temos $(n+m)^2 = 2\times$cateto feminino + 1. Lembrando que, nesta classe, n e m são inteiros consecutivos, temos que n=m+1. Logo, $(m+1+m)^2 = 2\times$cateto feminino + 1. Assim, o cateto feminino = $\frac{1}{2}[(2m+1)^2-1]$. A hipotenusa é um a mais, ou seja, $\frac{1}{2}[(2m+1)^2+1]$. Desta forma, o triângulo gerado é $(2m+1, \frac{1}{2}[(2m+1)^2-1], \frac{1}{2}[(2m+1)^2+1])$. Na álgebra retórica dos antigos, isto seria "um número ímpar, metade do seu quadrado diminuído de um[6], metade do seu quadrado aumentado por um". Em notação moderna, pondo k no lugar de 2m+1, temos $(k, \frac{1}{2}(k^2-1), \frac{1}{2}(k^2+1))$ com a restrição de que *k* seja ímpar. Isto é, claramente, a fórmula de Pitágoras. Em termos modernos, corresponde a uma troca de variáveis.

Vemos, então, que uma investigação dos triângulos gerados pela fórmula babilônica, à luz de uma tentativa de exibir sistematicamente os pares de geradores primos entre si, leva-nos naturalmente à fórmula de Pitágoras. Ainda mais, Marsílio Ficino, um dos mais importantes pitagóricos da segunda metade do Século XV, denomina "número nupcial" um número que é o produto de dois números consecutivos (ver ALLEN, 1994). Não se deve confundir esta definição com o "Número Nupcial" do Livro VIII da *República* de Platão. De fato, Platão não usa esta designação, mas se refere ao seu número com a frase "número geométrico". Esta terminologia deve ser uma recordação de um termo técnico da matemática pitagórica em que a razão da forma k+1:k seria uma "razão nupcial". Evidentemente, o nome advém do fato de que k+1:k é ou masculino (ímpar):feminino (par) ou feminino:masculino. Não sabemos se o nome antecede a descoberta da fórmula de Pitágoras ou se é conseqüência desta descoberta, mas, em qualquer caso, é apropriado pelos geradores dos triângulos da

---

[6] Note-se que a linguagem é ambígua (embora o seu significado fosse facilmente entendido pelos matemáticos) e é similar à linguagem de Platão na sua descrição do "Número Nupcial" no Livro VIII da *República*.

primeira classe, pois eles, contendo as concordâncias musicais, provavelmente foram usados pelos pitagóricos na sua cosmogonia.

Da nossa observação anterior de que a fórmula de Platão é o caso especial da fórmula babilônica com m=1, é óbvio que os geradores dos triângulos dados pela fórmula de Platão são os da primeira coluna de Figura 2. De fato, descartando o caso não interessante de n=m, a primeira coluna é a única coluna que contém somente razões primas entre si. Podemos, inclusive, definir uma nova partição das nossas razões através desta observação. Assim, sejam $R = \{n:m/\ n, m \in N \text{ com } n>m\}$ e $RP = \{n:m/\ n, m \in N \text{ com } n>m \text{ e } (n,m)=1\}$. Seja n:m~a:b quando m=b. Então ~ é uma relação de equivalência que gera as classes de equivalência $R_q = \{n:m \in R/\ m=q\}$ em R e $RP_q = \{n:m \in RP/\ m=q\}$ em RP. De novo, a partição é infinita, mas as classes de equivalência, em vez de ser as diagonais da Figura 2, serão as colunas desta Figura. A fórmula de Platão corresponde a primeira classe, RP_1, desta nova partição.

De novo, a fórmula de Platão é uma conseqüência natural desta partição, como a seguinte tabela indica:

n	m	r	terno gerado
2	1	1	(4, 3, 5)
3	1	2	(6, 8, 10)
4	1	3	(8, 15, 17)
5	1	4	(10, 24, 26)
6	1	5	(12, 35, 37)
7	1	6	(14, 48, 50)
8	1	7	(16, 63, 65)
9	1	8	(18, 80, 82)
10	1	9	(20, 99, 101)
11	1	10	(22, 120, 122)

Da tabela, é claro que o primeiro cateto é duas vezes *n* e que o segundo cateto e a hipotenusa são, respectivamente, o predecessor e sucessor de n^2 (3, 2^2, 5; 8, 3^2, 10; 15, 4^2, 17; *etc.*).

Conseqüentemente, o segundo cateto é n^2-1 e a hipotenusa é n^2+1, o que nos dá a fórmula de Platão: (2n, n^2-1, n^2+1).

Curiosamente, é muito fácil reinterpretar a fórmula de Platão em termos de pares nupciais. Basta colocar r=n-m. Para a primeira classe, m=1; logo, r=n-1 e n:r = n:n-1, a razão nupcial. A fórmula para os ternos usando os geradores nupciais *n* e *r* é (n+r+1, (n+1)r, (n+1)r + 2). Naturalmente, essa fórmula se reduz à fórmula de Platão quando substituímos n-1 por *r*.

O que teria levado Platão a abandonar a fórmula de Pitágoras? Na exibição sistemática das razões n:m, com n>m (Figura 2), há dois conjuntos de destaque: a primeira diagonal e a primeira coluna, pois estes dois conjuntos contêm somente razões primas entre si. Vimos que Pitágoras provavelmente optou pela primeira diagonal, contendo os geradores nupciais, porque contém as consonâncias musicais e, portanto, os triângulos resultantes seriam os mais apropriados para a construção do universo. Na cosmogonia platônica, porém, era necessário contemplar os 28 números da alma do mundo (ver *Timeo*, 35-36) e, portanto, Platão estaria a procura de triângulos em que estes números aparecessem. Numa interpretação, seria necessário multiplicar estes números por 384 para eliminar os valores fracionários. Desta forma, 25 dos números da alma do mundo seriam pares. Mas, nenhum destes 25 tem a forma ½(k^2-1) e, portanto, nenhuns destes valores aparecem no cateto feminino de um triângulo pitagórico gerado pela fórmula de Pitágoras. Ainda mais, os três números ímpares da alma do mundo não têm a forma ½(k^2+1) e, portanto, não podem aparecer na hipotenusa. Desta forma, a fórmula de Pitágoras só gera três triângulos contendo números da alma do mundo, – cada um dos três números ímpares aparece como o cateto masculino de um triângulo gerado por esta fórmula. Mas, este resultado é demasiadamente pobre para os seus propósitos cosmogônicos. Em contraste, todos os 25 números pares da alma do mundo aparecem em triângulos dados pela fórmula de Platão.

Notamos ainda, que os triângulos gerados pela Fórmula de Pitágoras exibem a relação nupcial de duas formas: a razão hipotenusa : cateto feminino é sempre a razão nupcial n+1:n e os seus perímetros são sempre da forma n(n+1), ou seja, um número nupcial no sentido de Ficino. Os perímetros dos triângulos gerados pela Fórmula de Platão são sempre o dobro de um número nupcial, ou seja, 2n(n+1), fato que poderia ter sido relacionado com a teoria platônica de tempo cíclico.

Abstract

In Ancient Greek mathematics, there were two well known formulas for generating Pythagorean triangles, one attributed to Pythagoras and the other attributed to Plato. In the present paper, we will analyze these two formulas from the point of view of rhetorical algebra, show how they might have been derived from the Babylonian formula for obtaining Pythagorean triangles, and suggest some reasons for which the Pythagoreans and Platonists might have found their respective sequences of triangles interesting. In a separate paper, we will analyze these two formulas from the viewpoint of the Pythagorean technique of finding the differences of differences.

Referências

ALLEN, Michael J. B. *Nuptial Arithmetic: Marsilio Ficinio's Commentary on the Fatal Number in Book VIII of Plato's* Republic. Berkeley: University of California Press, 1994.

ERICKSON, Glenn W., e John A. FOSSA. *Estudos Sobre o Número Nupcial*. Rio Claro: SBHMat, 2001.

FOSSA, John A. e Glenn W. ERICKSON. "Uma Heurística Platônica para Ternos Pitagóricos". *Princípios* 4 (5):147-158, 1997.

HEATH, Thomas L. *A History of Greek Mathematics*. New York: Dover, 1981.