Investigações acerca de uma versão modal para Lógica Intermediária dos Domínios Constantes

Maria da Paz Nunes de Medeiros[1]

1 - INTRODUÇÃO

Lógicas intermediárias de 1ª ordem se caracterizam por terem como axiomas certas proposições não aceitas intuicionisticamente, sem terem, entretanto, a mesma capacidade dedutiva da Lógica Clássica de 1ª ordem. Uma das lógicas intermediárias mais conhecidas é a lógica dos domínios constantes, CD, que tem a fórmula $\forall x(A(x) \vee B) \to (\forall x A(x) \vee B)$, onde x não ocorre livre em B, como axioma não aceito pelos intuicionistas.

Tratando-se de lógicas proposicionais modais, uma lógica modal intermediária tem as mesmas características das lógicas intermediárias de 1ª ordem. Isto é, ela não é uma lógica modal clássica, mas tem axiomas não demonstráveis em uma lógica modal intuicionista. Chamamos a atenção que, diferentemente do que ocorre no caso clássico, não existe ainda um consenso sobre o que de fato caracteriza uma lógica modal intuicionista.[2]

O nosso objetivo é desenvolver e investigar uma versão modal da lógica intermediária dos domínios constantes. Essa lógica modal intermediária, que denominaremos CDM, será o resultado de acrescentar a uma dada lógica modal intuicionista a fórmula $(A \vee B) \to (\; A \vee \Diamond B)$ como axioma, a qual chamaremos de C. Apresentaremos inicialmente um sistema modal intuicionista e mostraremos que essa fórmula não é teorema

---

[1] Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Filosofia.

[2] Em [SIMPSON,94], podemos encontrar uma longa discussão sobre esse tema.

deste sistema. Em seguida, apresentaremos o sistema axiomático CDM e uma semântica de Kripke. Mostraremos que CDM é correto e completo com respeito a essa semântica. Finalizaremos dando uma formulação em cálculo de seqüentes para CDM.

2 - LÓGICA MODAL INTUICIONISTA (KI)

Sabemos que não há um consenso quanto à base axiomática para sistemas modais intuicionistas. E, conseqüentemente, há controvérsias a respeito de certas propriedades que uma semântica para essas lógicas deva ter. Nos mais recentes sistemas modais desenvolvidos, que pretendem ter um caráter intuicionista, como por exemplo, os apresentados em [WIJESEKERA,90], [SIMPSON,94] e [PAIVA,97], podemos encontrar divergências quanto ao conjunto dos axiomas modais em função das motivações de seus autores. Entretanto, todos concordam quanto à não interdefinibilidade dos operadores modais. Além disso, em nenhum desses sistemas a fórmula $(A \vee B) \rightarrow (A \vee \Diamond B)$ é teorema. O sistema axiomático para a lógica modal intuicionista KI, que vamos apresentar pode ser considerado um subsistema do apresentado em [SIMPSON,94].

2.1 - Sintaxe para KI

A linguagem (L) de KI é constituída pelas variáveis proposicionais p, q, p_1, q_1,...., a constante lógica $\perp$, os conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e os operadores modais e $\Diamond$. Usaremos as letras A, B, C,.... como metavariáveis para fórmulas.

Sistema axiomático

0) Todas as instâncias de substituição de teoremas da Lógica Proposicional Intuicionista (LPI)

1) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

2) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Diamond B)$

3) $\Diamond\bot \to \bot$
4) $\Diamond(A \vee B) \to (\Diamond A \vee \Diamond B)$
Modus Ponens (MP): Se $A \to B$ e A, então B
Necessitação (NEC): se $\vdash A$, então $\vdash$ A

2.2 - Semântica de Kripke para a lógica modal intuicionista

Na semântica de mundos possíveis de Kripke existem diferentes mundos nos quais a mesma fórmula pode expressar diferentes proposições, ou diferentes valores de verdade. Nas lógicas modais clássicas, o valor de verdade de uma fórmula em um mundo x é determinado localmente se ela for constituída pelos usuais conectivos lógicos. Se a fórmula envolver modalidades, seu valor de verdade depende fortemente do *status* dos mundos com os quais x se relaciona. Veja [CHELLAS,80].

Na semântica de Kripke para lógicas intuicionistas, seguindo [van DALEN,83], os mundos podem ser pensados como sendo estados de conhecimento que são estendidos ao longo do tempo. Neste caso, o valor de verdade das fórmulas envolvendo o conectivo lógico $\to$ e o quantificador $\forall$ em um dado momento k de um mundo depende dos momentos futuros desse mundo. A verdade das demais fórmulas só depende do *status* desse mundo no momento k.

Intuitivamente, a semântica de Kripke que vamos apresentar para KI será constituída por mundos que são estendidos ao longo do tempo, com a condição de que as verdades em um mundo são preservadas nos seus estágios futuros. Será também estabelecida uma relação de conhecimento entre os mundos, com a exigência de que, se um mundo x conhece um mundo y, então todo estágio futuro de x conhece algum estágio futuro de y ou, pelo menos, o próprio y. Nessa semântica, a verdade de uma fórmula modal da forma A em um determinado mundo x, dependerá tanto dos mundos conhecidos por x, quanto dos mundos que são conhecidos pelos estágios futuros de x. Já as fórmulas que expressam possibilidade dependem apenas dos mundos conhecidos por x.

De uma forma mais precisa, uma semântica de Kripke para *KI* é uma estrutura bi-relacional da forma $\langle W,\leq,R,V\rangle$, onde W é um conjunto não vazio de mundos possíveis parcialmente ordenado por $\leq$, R é uma relação binária sobre W (relação de conhecimento) e V é uma função monotônica, V: Var( ) $\rightarrow$ $P(W)$, i.é., $V(p) = \{ w \in W | (p) = T\}$; e a seguinte condição deve ser satisfeita:

(C1) para todo w,x,y $\in$ W, se x $\geq$wRy, então existe y'$\in$W tal que xRy'$\geq$y.

A relação de satisfação, ||-, é definida por indução na complexidade de fórmulas como segue:

Para todo w $\in W$

w ||- p sse w $\in$ V(p), para toda variável proposicional p.

w ||-/- $\perp$

w ||- $A \wedge B$ sse w ||- A e w ||- B

w ||- $A \vee B$ sse w ||- A ou w ||- B

w ||- $A \rightarrow B$ sse para todo x, se w $\leq$ x e x ||- A então x ||- B

w ||- A sse para todo x, y $\in$ W, se w $\leq$ x Ry então y ||- A

w ||- $\Diamond A$ sse existe x $\in$ W tal que w R x e x ||- A

A prova de que os axiomas de **KI** são corretos com respeito a essa semântica segue sem maiores dificuldades.

2.3 - Independência da fórmula *C* com respeito ao sistema KI

Para mostrar que $(p \vee q) \rightarrow (p \vee \Diamond q)$ não é teorema de KI, é suficiente construir um modelo que valide todos os axiomas de KI e garantir a existência de um mundo no qual esta fórmula seja falsa.

Seja M o modelo $\langle W, \leq, R, V\rangle$, onde $W = \{w,x,y\}$; R=$\{(x,y)\}$; $\leq$ é uma relação reflexiva, transitiva e w $\leq$ x ; V(p) = $\{w,x\}$ e V(q) = $\{y\}$.

Para mostrar que *C* é falsa no mundo w, será suficiente mostrar que w ||- $(p \vee q)$ e w ||-/- $p \vee \Diamond q$.como y ||- $p \vee q$, então w ||- $(p \vee q)$. Por outro lado, como y ||-/-p implica w ||-/- p, e w || -/-$\Diamond q$, temos w || -/- $p \vee \Diamond q$. Assim, w ||-/- $(p \vee q) \rightarrow (p \vee \Diamond q)$.

Não é difícil mostrar que M satisfaz (C1), $\leq$ é uma ordem parcial e V é uma função monotônica. Portanto, M é um modelo para KI.

3 - LÓGICA MODAL INTERMEDIÁRIA CDM

3.1 - Sistema axiomático e semântica de Kripke para CDM

O sistema axiomático de CDM é constituído pelos mesmos axiomas e regras de inferência de KI, além do axioma

C: $(A \vee B) \rightarrow (\ A \vee \diamond B)$

A semântica de Kripke β para CDM terá a mesma estrutura e características da semântica para KI, apresentada na seção 2.2, com o acréscimo da seguinte condição: se um estágio futuro x' de x conhece um determinado mundo y', então x conhece algum estágio anterior de y' ou o próprio y'. Isto significa que, ao longo do tempo, estágios futuros de um mundo x não conhecem outros mundos a não ser estágios futuros dos mundos que já eram conhecidos por x. Como conseqüência desta condição, a verdade de uma fórmula necessária em um mundo x passará a depender apenas dos mundos conhecidos por x. Mais precisamente, além da condição (C1), β deve satisfazer:

(C2) para todo x, x', y' $\in$ W, se $x \leq x'Ry'$, então existe $y \in W$ tal que $xRy \leq y'$

Com o acréscimo dessa condição, a definição de satisfação para fórmulas que têm a forma A passa a ser:

w ||- A sse para todo $x \in W$, se wRx então x ||- A .

Observamos que a condição (C2) é de certa forma semelhante à restrição imposta aos modelos de Kripke para CD. A saber, o conjunto de objetos de cada mundo deve ser o mesmo ao longo do tempo[3]. Um outro paralelo que podemos fazer entre as semânticas das lógicas CD e CDM é com respeito à definição de verdade para fórmulas da forma $\forall xA$, no caso de

[3] Veja [DUMMETT,77]

CD, e A, em CDM. Em ambos as casos, a verdade dessas fórmulas em um mundo x, ao contrário do que ocorre nas semâticas intuicionistas, não depende mais dos estágios futuros de x, mas apenas de certas características que este mundo x tenha.

3.2 - Teoremas de Completude e Correção

Lema 1: (Lema da monotonicidade): para todo w, x $\in W$, se $w \leq x$ e w $\Vdash A$, então x $\Vdash A$.

Prova. Por indução na complexidade de A. Mostraremos somente os casos em que A é uma fórmula modal. Se A é B, supor que w $\Vdash$ B e $w \leq x$. Então, para todo z, wRz implica z $\Vdash B$. Assuma que xRy para algum y. Assim, por (C2) existe y' tal que wRy' e $y' \leq y$. Logo, y' $\Vdash B$ e por hipótese de indução y $\Vdash B$. Portanto, x $\Vdash$ B. Provamos similarmente, usando (C1), o caso em que A é $\diamond B$.

Teorema 2: (Correção): CDM é correto com respeito a β.

Prova. A parte proposicional não é problemática. A correção dos axiomas (1) e (2) segue do lema da monotonicidade e (C2). A correção dos outros axiomas e das regras de inferência segue apenas da definição de satisfação.

Apresentaremos, agora, algumas definições e lemas pertinentes à demonstração do teorema de completude.

Definição 3: Um conjunto s de fórmulas é *primo* se satisfaz as seguintes condições:

1) se $s \vdash A$ então $A \in s$ (s é fechado dedutivamente)
2) $s \nvdash \bot$ (s é consistente)
3) se $A \vee B \in s$, então $A \in s$ ou $B \in s$ (s tem a propriedade da disjunção).

Lema 4: (lema primo): se $s \nvdash A$, então existe um conjunto primo t tal que $s \subseteq t$ e $t \nvdash A$.

Este lema é provado por uma construção standard de Lindenbaum.

Definição5: O *modelo canônico* para CDM é a estrutura $\beta^*= \langle W^*, \leq^*, R^*, V^* \rangle$, onde:
$W^*= \{s|$ s é um conjunto primo de fórmulas$\}$
$s\leq^*t$ sse $s \subseteq t$
sR^*t sse $\{A/\ A \in s\} \subseteq t$ e $\{\diamond B|\ B \in t\} \subseteq s$
$V^*(p) = \{s|p \in s\}$

Lema 6: se $\{A/\ A \in s\}|\text{-}B$, então $s\ |\text{-}\ B$
Prova. Vamos supor que $\{A/\ A\in s\}|\text{-}B$. Então, existem $A_1,...,A_n$ tal que $A_i \in s$ e $A_1,...,A_n|\text{-}\ B$. Por NEC, axioma (1) e tautologia temos que $s\ |\text{-}\ A_1 \wedge ... \wedge A_n \rightarrow B$. Como $A_i \in s$ e s é primo, então $s\ |\text{-}\ B$.

Lema 7: β^* satisfaz (C1)
Prova. Supor $x\leq^*w$ e xR^*y. Devemos encontrar um mundo $y' \in W^*$ tal que wR^*y' e $y\leq^*y'$. Seja $y_0 = y \cup\{A/\ A\in w\}$. Desejamos mostrar que $y_0|\text{-/-}\{B|\diamond B\notin w\}$. Vamos supor que $y_0|\text{-}\{B|\diamond B\notin w\}$. Logo, teríamos que $y\ |\text{-}\ A_1\wedge...\wedge A_n \rightarrow B_1\vee...\vee B_k$, onde $A_i\in w$ e $\diamond B_j\notin w$. Como xR^*y, então $x\ |\text{-}\diamond(A_1 \wedge...\wedge A_n\rightarrow B_1\vee...\vee B_k)$. Por tautologia, NEC e axiomas (1) e (2) temos que $x\ |\text{-}\ (A_1\wedge...\wedge A_n) \rightarrow\diamond(B_1\vee...\vee B_k)$. Como $x\leq^*w$, $A_i \in w$ e w é primo, então $w\ |\text{-}\diamond(B_1\vee...\vee B_k)$. Logo, pelo axioma (4), $w\ |\text{-}\diamond B_1\vee...\vee\diamond B_k$. Logo, para algum j, $\diamond B_j \in w$, pois w é primo. Isto é uma contradição. Logo $y_0\ |\text{-/-}\ \{B|\diamond B \notin w\}$. Portanto, pelo lema primo, existe um conjunto y' tal que y' é primo, $y_0 \subseteq y'$ e $y'\ |\text{-/-}\{B|\diamond B\notin w\}$. É fácil ver que y' é o mundo exigido por (C1).

Lema 8: β^* satisfaz (C2).
Prova. Supor $w\leq^*x$ e xR^*y. Devemos encontrar um mundo $z\in W^*$ tal que wR^*z e $z\leq^*y$. Seja $z_0=\{A/\ A\in w\}$. Desejamos mostrar que $z_0\ |\text{-/-}\{B|\diamond B\notin w\}\cup\{C|C\notin y\}$. Vamos supor que $z_0|\text{-}\{B|\diamond B\notin w\}\cup\{C|C\notin y\}$. Assim, teríamos que $\{A/\ A\in w\}|\text{-}$

$\{B|\Diamond B\notin w\} \cup \{C|C\notin y\}$.Logo, $\{A/\ A\in w\}$|-$(B_1 V...VB_k)V\ (C_1 V...VC_m)$, onde $\Diamond B_i\notin w$ e $C_j\notin y$. Pelo lema 6, temos que w |- $((B_1 V...VB_k)V(C_1 V...VC_m))$. Então, pelo axioma ($C$), w |- $\Diamond(B_1\ V...VB_k)V\ \ (C_1 V...VC_m)$. Como w é primo, w |- $\Diamond(B_1 V...VB_k)$ ou w |- $(C_1 V...VC_m)$. Se w |- $\Diamond(B_1\ V...VB_k)$, então uma contradição segue do axioma (4), do fato que w é primo e $\Diamond B_i\notin w$. Por outro lado, se w |- $(C_1 V...VC_m)$, também chagamos a uma contradição, pois w≤*x , xR*y, y é primo e $C_j \notin y$. Assim, pelo lema primo, existe z tal que z é primo, $z_0 \subseteq z$ e z |-/- $\{B|\Diamond B\notin w\} \cup \{C|C\notin y\}$. Potanto, z é o mundo exigido por (C2).

Lema 9: se β, s ||- A então β*, s ||- A
Prova. Consequencia imediata dos lemas (7) e (8).

Lema 10: Para todo conjunto primo s, s ||- A se e somente se $A\in s$
Prova. Por indução na complexidade de A. Mostraremos apenas os casos modais, pois os demais casos seguem facilmente da hipótese de indução e do lema primo.

Caso 1) A é B.

Vamos mostrar que $B\notin s$ implica s ||-/- B. Supor que $B\notin s$. Então, s |-/- B, pois s é primo. Logo,

(i) $\{C/\ C\in s\}$|-/- $\{A|\Diamond A\notin s\}\cup\{B\}$.

Pois, se ocorre o contrário, existem $A_1,...,A_n$ tal que $\Diamond A_i \notin s$ e $\{C/\ C\in s\}$|- $BVA_1 V...VA_n$. Pelo lema (6) e axiomas (C) e (4), temos s |- $B\ V\Diamond A_1\ V...V\Diamond A_n$. Então, como s é primo, s |- B ou para algum i, s |-$\Diamond A_i$. Em ambos os casos temos uma contradição.

De (i) e do lema primo podemos concluir que existe um conjunto t tal que t é primo, $\{C/\ C\in s\}\subseteq t$ e t |-/- $\{A|\Diamond A\notin s\}\cup\{B\}$. Logo, $B\notin t$ e $\{\Diamond A|\ A\in t\}\subseteq s$. Assim, sR*t e por hipótese de indução t ||-/-B. Portanto, s ||-/- B.

Por outro lado, pela definição de satisfação e hipótese de indução, $B\in s$ implica s ||- B.

Caso 2) A é $\Diamond B$

Mostraremos, inicialmente, que $\Diamond B \in s$ implica s $\Vdash \Diamond B$. Supor que $\Diamond B \in s$. Logo s $\vdash \Diamond B$. Disto segue:

(ii) $\{C/\ C \in s\} \cup \{B\} \nvdash \{A | \Diamond A \notin s\}$

Caso contrário, existiriam $A_1 ... A_n$ tais que $\Diamond A_i \notin s$ e $\{C/\ C \in s\} \vdash B \rightarrow A_1 \mathrm{V} ... \mathrm{V} A_n$. Então, pelo lema (6), s $\vdash$ (B $\rightarrow A_1 \mathrm{V} ... \mathrm{V} A_n$). Dos axiomas (2), (4), do fato de s ser primo e s $\vdash \Diamond B$ segue que s $\vdash \Diamond A_1 \mathrm{V} ... \mathrm{V} \Diamond A_n$. Logo s $\vdash \Diamond A_i$, para algum i, ou seja, $\Diamond A_i \in s$. Contradição.

De (ii) e do lema primo podemos concluir que existe um conjunto t tal que t é primo, $\{B\} \cup \{C/\ C \in s\} \subseteq t$ e t $\nvdash \{A | \Diamond A \notin s\}$. Logo, $B \in t$, $\{C/\ C \in s\} \subseteq t$ e $\{\Diamond A |\ A \in t\} \subseteq s$. Isto significa que sR*t. Por hipótese de indução, t $\Vdash B$. Portanto, s $\Vdash \Diamond B$.

Não é difícil mostrar que s $\Vdash \Diamond B$ implica $\Diamond B \in s$.

<u>Teorema 11:</u> (Completude): se β, s $\Vdash A$ então, s $\vdash_{CDM} A$

Prova. Supor que s $\nvdash A$. Pelo lema primo existe um conjunto t tal que s $\subseteq$ t e t $\nvdash A$. Então $A \notin t$, pois t é primo. Pelo lema (10), temos β^*, t $\nVdash A$ e pelo lema (9), temos que β, t $\nVdash A$. Como s $\subseteq$ t, pela lema da monotonicidade β, s $\nVdash A$.

4 - CÁLCULO DE SEQÜENTES PARA CDM

Inicialmente, pensamos em formular o cálculo de seqüentes para CDM semelhante ao apresentado em [WIJESEKERA, 90]. A nossa idéia era substituir apenas as regras modais daquele cálculo por outras capazes de provar os axiomas modais de CDM. As regras estruturais e proposicionais, tal como em [WIJESEKERA, 90], eram as mesmas do cálculo de seqüentes intuicionista com múltiplas conclusões. Infelizmente, ao contrário do sistema de Wijesekera, o nosso não era livre-de-corte. Ao substituir a regra modal

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A} \qquad \text{por} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A}{\Gamma \vdash \Diamond \Sigma,\ A}$$

passaríamos a poder provar, por exemplo, o seqüente $(A \vee B) \vdash \Diamond A,\ A \to (A \wedge B)$. A prova desse seqüente, no entanto, só seria possível com a regra do corte.

O mesmo problema já havia acontecido com a lógica CD. López-Escobar apresentou um cálculo de seqüentes com múltiplas conclusões para CD, mas seu sistema também não era livre-de-corte. As primeiras formulações de cálculo de seqüentes para CD que fosse livre-de-corte apareceram em [KASHIMA,91] e [PEREIRA,93]. Em ambos os trabalhos a idéia subjacente é estabelecer um mecanismo que represente relações de dependência entre fórmulas que ocorrem no conseqüente e fórmulas do antecedente de um dado seqüente.

O cálculo de seqüentes para o sistema CDM que vamos apresentar, denominado CS_{CDM}, será baseado no apresentado para CD em [PEREIRA,93]. O nosso sistema, a menos de regras modais no lugar das regras de introdução direita/esquerda dos quantificadores, será o mesmo ali apresentado.

4.1 - O Sistema CS_{CDM}

Um seqüente em CS_{CDM} é uma expressão da forma $A_1(n_1),\ldots,A_k(n_k) \vdash B_1/S_1,\ldots,B_j/S_j$, onde $A_i(n_i)$ é pensada como uma hipótese indexada e S_l é um conjunto de índices que indica quais são as hipóteses de que a fórmula B_l depende.

<u>Definição 12:</u> Sejam S e S' conjuntos de índices, n um índice e Δ um conjunto de fórmulas indexadas por um conjunto de índices.

1) $S[n_1,\ldots,n_k|S'] = (S - \{n_1,\ldots,n_k\}) \cup S'$, se $n_1,\ldots,n_k \in S$; caso contrário, $S[n_1,\ldots,n_k|S'] = S$.

2) $\Delta[n|S']$ é o resultado de substituir cada $S \in \Delta$ por $S[n|S']$;

3) $S[n,S'] = S \cup S'$, se $n \in S$; por outro lado $S[n,S'] = S$;

4) $\Delta[n,S']$ é o resultado de substituir cada $S \in \Delta$ por $S[n,S']$.

Apresentaremos agora o sistema CS_{CDM}.

Seqüentes iniciais: $A(n) \vdash A/\{n\}$

$\bot(n) \vdash A_1/\{n\},\ldots,A_k/\{n\}$

Regras estruturais

Atenuação

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A(\mathrm{n}),\Gamma \vdash \Delta^*} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A/\{\ \}}$$

(n é um índice novo e Δ^* é o resultado de introduzir em algum conjunto de índices S de Δ o índice n).

Contração

$$\frac{A(\mathrm{m}),A(\mathrm{n}),\Gamma \vdash \Delta}{A(\mathrm{k}),\Gamma \vdash \Delta^*} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A/\mathrm{S}, A/\mathrm{S}'}{\Gamma \vdash \Delta, A/\mathrm{S}\cup\mathrm{S}'}$$

(k = min{m,n} e Δ^* é obtido de Δ substituindo cada ocorrência de m e n em Δ por k)

Permutação

$$\frac{\Gamma,A(\mathrm{m}),B(\mathrm{n}),\Phi \vdash \Delta}{\Gamma,B(\mathrm{n}),A(\mathrm{m}),\Phi \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta,A/\mathrm{S},B/\mathrm{S}',\Sigma}{\Gamma \vdash \Delta,B/\mathrm{S}',A/\mathrm{S},\Sigma}$$

Cut $$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A/\mathrm{S} \qquad A(\mathrm{n}),\Phi \vdash \Sigma}{\Gamma,\Phi \vdash \Delta,\Sigma^*}$$

(Σ^* é obtida de Σ substituindo cada S' de Σ que contém n por S'[n|S])

Regras lógicas:

$$\frac{A(\mathrm{n}),\Gamma \vdash \Delta}{A\wedge B(\mathrm{n}),\Gamma\ \Delta}\ , \quad \frac{B(\mathrm{n}),\Gamma \vdash \Delta}{A\wedge B(\mathrm{n}),\Gamma \vdash \Delta} \quad (L_\wedge) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A/\mathrm{S} \quad \Phi \vdash \Sigma,B/\mathrm{S}'}{\Gamma,\Phi \vdash \Delta,\Sigma, A\wedge B/\mathrm{S}\cup\mathrm{S}'} \quad (R_\wedge)$$

$$\frac{A(\mathrm{m}),\Gamma \vdash \Delta \quad B(\mathrm{n}),\Phi \vdash \Sigma}{A\vee B(\mathrm{k}),\Gamma, \Phi \vdash \Delta^*,\Sigma^*} \quad (L_\vee) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A/\mathrm{S}}{\Gamma \vdash \Delta, A\vee B/\mathrm{S}}\ , \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B/\mathrm{S}}{\Gamma \vdash \Delta, A\vee B/\mathrm{S}} \quad (R_\vee)$$

(Δ^* é obtido de Δ substituindo cada ocorrência de m por k e Σ^* de Σ substituindo cada ocorrência de n por k.)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A/\mathrm{S} \quad B(\mathrm{n}),\Phi \vdash \Sigma}{A\to B(\mathrm{n}),\Gamma,\Phi \vdash \Delta,\Sigma^*} \quad (L_\to) \qquad \frac{A(\mathrm{n}),\Gamma \vdash \Delta,B/\mathrm{S}}{\Gamma \vdash \Delta,A\to B/\mathrm{S}-\{\mathrm{n}\}} \quad (R_\to)$$

Em $(L_\to)$, Σ^* é obtida de Σ substituindo cada S' de Σ que contém n por S'[n,S].

Em ($R_{\rightarrow}$), temos a restrição: para todo $S' \in \Delta$, $n \notin S'$

$$\frac{\Gamma \vdash \Sigma, A/S}{\Gamma \vdash \diamond\Sigma, A/S}\,(M_1) \qquad \frac{\Gamma, A(n) \vdash \Sigma}{\Gamma, \diamond A(n) \vdash \diamond\Sigma}\,(M_2) \qquad \frac{\Gamma, A(n) \vdash \bot}{\Gamma, \diamond A(n) \vdash \bot}\,(M_3)$$

4.2 - Eliminação do corte

Mostraremos nesta seção que CS_{CDM} é um cálculo de seqüentes livre-de-corte. Noções importantes, tais como rank de uma prova ou grau de uma regra, podem ser encontradas em [TAKEUTI, 75, p 25-28]. Antes de apresentar o lema principal da prova do corte de CS_{CDM} vamos introduzir uma nova regra no sistema que é uma generalização da regra Cut.

Cut-indexada: $$\frac{\Gamma \vdash \Delta \qquad \Phi \vdash \Sigma}{\Gamma, \Phi^* \vdash \Delta^*, \Sigma}\,(A; n_1,\dots,n_k; m_1,\dots,m_j),$$

onde A é chamada a cut-fórmula-indexada, Δ^* é o resultado de retirar A de Δ nas posições $n_1,\dots,n_k$ e Φ^* de retirar A de Φ nas posições $m_1,\dots,m_j$.

<u>Lema 13</u>: Se π é uma prova de $\Gamma \vdash \Delta$ na qual apenas uma regra Cut-indexada ocorre e esta ocorre como última inferência, então existe uma prova de $\Gamma \vdash \Delta$ livre-de-cut-indexada.

Prova. Esta prova é por dupla indução sobre o grau da cut-fórmula-indexada e rank de π, como na prova original do Lema Principal de Gentzen. Apresentaremos apenas os casos onde a cut-fórmula-indexada é uma fórmula modal. Quanto aos demais casos, podemos encontrar uma prova similar em [TAKEUTI,75].

Seja π da forma $\dfrac{s_1 \quad s_2}{s}\,(C; n_1,\dots,n_k; m_1,\dots m_j)$, onde C é a cut-fórmula-indexada. Em cada caso, vamos mostrar que existe uma prova π' de $\Gamma \vdash \Delta$ menos complexa que π.

$\mathrm{rank}(\pi) = 2$

Caso 1) As últimas inferências de s_1 e s_2 são (M_1) e a cut-fórmula-indexada é (A)

$$\pi \text{ é } \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A/S}{\Gamma \vdash \diamond\Delta,\ A/S} \qquad \dfrac{\Phi \vdash \Sigma, B/S'}{\Phi \vdash \diamond\Sigma,\ B/S'}}{\Gamma, \Phi^{*} \vdash \diamond\Delta, \diamond\Sigma,\ B/S'} \ (A; n_1,\ldots,n_k; m_1,\ldots,m_j)$$

$$\pi' \text{ é } \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A/S \qquad \Phi \vdash \Sigma, B/S'}{\Gamma, \Phi^{*} \vdash \Delta, \Sigma, B/S'} \ (A; n_1,\ldots,n_k; m_1,\ldots,m_j)}{\Gamma, \Phi^{*} \vdash \diamond\Delta, \diamond\Sigma,\ B/S'}$$

Caso 2) As últimas inferências de s_1 e s_2 são (M_1) e (M_2) respectivamente. A cut-fórmula-indexada é (A)

$$\pi \text{ é } \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A/S}{\Gamma \vdash \diamond\Delta,\ A/S} \qquad \dfrac{\Phi, B(m) \vdash \Sigma}{\Phi, \diamond B(m) \vdash \diamond\Sigma}}{\Gamma, \Phi^{*}, \diamond B(m) \vdash \diamond\Delta, \diamond\Sigma} \ (A; n_1\ldots,n_k; m_1\ldots,m_j)$$

$$\pi' \text{ é } \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A/S \qquad \Phi, B(m) \vdash \Sigma}{\Gamma, \Phi^{*}, B(m) \vdash \Delta, \Sigma} \ (A; n_1,\ldots,n_k; m_1,\ldots,m_j)}{\Gamma, \Phi^{*}, \diamond B(m) \vdash \diamond\Delta, \diamond\Sigma}$$

Caso 3) As últimas inferências de s_1 e s_2 são (M_1) e (M_2) respectivamente. A cut-fórmula-indexada é ($\diamond A$)

$$\pi \text{ é } \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, B/S}{\Gamma \vdash \diamond\Delta,\ B/S} \qquad \dfrac{\Phi, A(m) \vdash \Sigma}{\Phi, \diamond A(m) \vdash \diamond\Sigma}}{\Gamma, \Phi \vdash \diamond\Sigma, \diamond\Delta^{*},\ B/S} \ (\diamond A; n_1\ldots,n_k; m)$$

$$\pi' \text{ é } \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, B/S \qquad \Phi, A(m) \vdash \Sigma}{\Gamma, \Phi \vdash \Sigma, \Delta^{*}, B/S} \ (A; n_1\ldots,n_k; m)}{\Gamma, \Phi \vdash \diamond\Sigma, \diamond\Delta^{*},\ B/S}$$

Caso 4) As últimas inferências de s_1 e s_2 são (M_1) e (M_3). A cut-fórmula-indexada é (A)

$$\pi \text{ é } \quad \cfrac{\cfrac{\Gamma \vdash \Delta, A/S}{\Gamma \vdash \diamond\Delta, A/S} \quad \cfrac{\Phi, B(m) \vdash}{\Phi, \diamond B(m) \vdash}}{\Gamma, \Phi^*, \diamond B(m) \vdash \diamond\Delta} \ (A; n_1,\ldots,n_k; m_1,\ldots,m_j)$$

$$\pi \text{ é } \quad \cfrac{\cfrac{\Gamma \vdash \Delta, A/S \quad \Phi, B(m) \vdash}{\Gamma, \Phi^*, B(m) \vdash \Delta} \ (A; n_1,\ldots,n_k; m_1,\ldots,m_j)}{\Gamma, \Phi^*, \diamond B(m) \vdash \diamond\Delta}$$

Caso 5) As última inferência de s_1 e s_2 são (M_1) e (M_3). A cut-fórmula-indexada é $(\diamond A)$

$$\pi \text{ é } \quad \cfrac{\cfrac{\Gamma \vdash \Delta, B/S}{\Gamma \vdash \diamond\Delta, B/S} \quad \cfrac{\Phi, A(m) \vdash}{\Phi, \diamond A(m) \vdash}}{\Gamma, \Phi \vdash \diamond\Delta^*, B/S} \ (\diamond A; n_1\ldots,n_k; m)$$

$$\pi' \text{ é } \quad \cfrac{\cfrac{\Gamma \vdash \Delta, B/S \quad \Phi, A(m) \vdash}{\Gamma, \Phi \vdash \Delta^*, B/S} \ (A; n_1\ldots,n_k; m)}{\Gamma, \Phi \vdash \diamond\Delta^*, B/S}$$

Caso 6) As últimas inferências de s_1 e s_2 são (M_2) e a cut-fórmula-indexada é $(\diamond A)$

$$\pi \text{ é } \quad \cfrac{\cfrac{\Gamma, B(n) \vdash \Delta}{\Gamma, \diamond B(n) \vdash \diamond\Delta} \quad \cfrac{\Phi, A(m) \vdash \Sigma}{\Phi, \diamond A(m) \vdash \diamond\Sigma}}{\Gamma, \Phi, \diamond B(n) \vdash \diamond\Delta^*, \diamond\Sigma} \ (\diamond A; n_1\ldots,n_k; m)$$

$$\pi' \text{ é } \quad \cfrac{\cfrac{\Gamma, B(n) \vdash \Delta \quad \Phi, A(m) \vdash \Sigma}{\Gamma, \Phi, B(n) \vdash \Delta^*, \Sigma} \ (A; n_1\ldots,n_k; m)}{\Gamma, \Phi, \diamond B(n) \vdash \diamond\Delta^*, \diamond\Sigma}$$

Caso 7) As últimas inferências de s_1 e s_2 são (M_2) e (M_3). A cut-fórmula-indexada é $(\diamond A)$

$$\pi \text{ é } \quad \cfrac{\cfrac{\Gamma, B(n) \vdash \Delta}{\Gamma, \diamond B(n) \vdash \diamond\Delta} \quad \cfrac{\Phi, A(m) \vdash}{\Phi, \diamond A(m) \vdash}}{\Gamma, \Phi, \diamond B(n) \vdash \diamond\Delta^*} \ (\diamond A; n_1\ldots,n_k; m)$$

$$\pi' \text{ é } \quad \begin{array}{c} \Gamma, B(n) \vdash \Delta \quad \Phi, A(m) \vdash \; (A; n_1 \ldots, n_k; m) \\ \hline \Gamma, \Phi, B(n) \vdash \Delta^* \\ \hline \Gamma, \Phi, \Diamond B(n) \vdash \Diamond \Delta^* \end{array}$$

Teorema 14: Se existe uma prova de $\Gamma \vdash \Delta$ em CS_{CDM}, então $\Gamma \vdash \Delta$ é provado sem a regra CUT
Prova. Conseqüência imediata do lema (13).

4.3 - Equivalência entre CDM e CS_{CDM}

Lema 15: Se CDM $\vdash A$ então $CS_{CDM} \vdash A$
Prova. É suficiente mostrar que os axiomas de CDM são teoremas do cálculo de seqüentes e que as regras de inferência de CDM são válidas. A prova que os axiomas proposicionais são teoremas do cálculo de seqüentes são as usuais, acrescidas dos indexadores. A regra NEC segue de (M_1), tomando Γ e Σ vazios. Os axiomas modais são provados como segue:

$$\begin{array}{c} A(1) \vdash A/\{1\} \quad B(2) \vdash B/\{2\} \\ \hline A(1), A \rightarrow B(2) \vdash B/\{1,2\} \\ \hline A(1), \; (A \rightarrow B)(2) \vdash \; B/\{1,2\} \\ \hline (A \rightarrow B)(2) \vdash \; A \rightarrow \; B/\{2\} \\ \hline \vdash \; (A \rightarrow B) \rightarrow (\; A \rightarrow \; B)/\{ \} \end{array} \qquad \begin{array}{c} A(1) \vdash A/\{1\} \quad B(2) \vdash B/\{2\} \\ \hline A \rightarrow B(2), A(1) \vdash B/\{1,2\} \\ \hline (A \rightarrow B)(2), \Diamond A(1) \vdash \Diamond B/\{1,2\} \\ \hline (A \rightarrow B)(2) \vdash \Diamond A \rightarrow \Diamond B/\{2\} \\ \hline \vdash \; (A \rightarrow B) \rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Diamond B)/\{ \} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A(1) \vdash A/\{1\} \quad B(2) \vdash B/\{2\} \\ \hline A \vee B(3) \vdash \; A/\{3\}, B/\{3\} \\ \hline \Diamond(A \vee B)(3) \vdash \Diamond A/\{3\}, \Diamond B/\{3\} \\ \hline \Diamond(A \vee B)(3) \vdash \Diamond A \vee \Diamond B/\{3\} \\ \hline \vdash \Diamond(A \vee B) \rightarrow \Diamond A \vee \Diamond B/\{ \} \end{array} \qquad \begin{array}{c} A(1) \vdash A/\{1\} \quad B(2) \vdash B/\{2\} \\ \hline A \vee B(3) \vdash A/\{3\}, B/\{3\} \\ \hline (A \vee B)(3) \vdash \; A/\{3\}, \Diamond B/\{3\} \\ \hline (A \vee B)(3) \vdash \; A \vee \Diamond B/\{3\} \\ \hline \vdash \; (A \vee B) \rightarrow \; A \vee \Diamond B/\{ \} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \bot(1) \vdash \bot\{1\} \\ \hline \Diamond\bot(1) \vdash \bot\{1\} \\ \hline \vdash \Diamond\bot \rightarrow \bot/\{ \} \end{array}$$

Ainda não provamos o inverso do lema 15. Mas, seguindo a prova do lema 3.5 apresentado em [PEREIRA,93], que é o lema similar em CD, podemos observar que as nossas regras modais parecem não causar nenhum impacto na prova.

Abstract

The purpose of this work is to investigate the semantic and syntax of the intermediate modal logic CDM that is obtained from an intuitionistic version of S4 through the addition of the

axiom $(A \vee B) \rightarrow (A \vee \Diamond B)$. Our starting point will be the semantic and syntax analysis of intuitionistic modal logic carried by A. Simpsom in [SIMPSON, 94]. We will show that CDM is sound and complete with respect to birelation models that satisfy the following condition: to every world x, x' and y', if $x \leq x'Ry'$, then there exists y such that $xRy \leq y'$.

5 – Bibliografia

BOZIC, M. and DOSEN, K. Models for Normal Intuitionistic Modal Logics. *Studia Logica*, 43, 1984.

CHELLAS, B. *Modal Logic*. Clarendon, Oxford, 1980.

van DALEN, D. *Logic and Structure*. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

DOSEN,K. Models for Stronger Normal Intuitionistic Modal Logics. *Studia Logica*, 44, 1985.

DUMMETT,M.A.E. *Elements of Intuitionistim*. Clarendon Press, Oxford, 1977.

EWALD,W.B. Intuitionistic Tense and Modal Logic. *Journal of Symbolic Logic*, 51, 1986 .

GOLDBLATT. *Logic of Time and Computation*. CSLI. Standford, 1992.

KASHIMA, R. Cut-Elimination Theorem for the the Intermediate Logic CD. *Research Report on Information Sciences*, C-100, 1991, Tokyo Institute of Technology.

KASHIMA, R. and SHIMURA,T. Cut-Elimination Theorem for Logic of Constant Domain *Mahematical Logic Quarterly*. 40, 1994, p 153-172.

LÓPEZ-ESCOBAR. E.G.K. On the interpolation theorem for the Logic of Constant Domain. *Journal of Symbolic Logic*, 46, 1981.

LÓPEZ-ESCOBAR. E.G.K. A second paper "on the interpolation theorem for the Logic of Constant Domain". *Journal of Symbolic Logic*, 48, 1983, p 595--599.

MASSINI, A. 2-Sequent Calculus: Intuitionism and Natural Deduction. *Journal of Logic and Computation,* 3, 1993, p 533-562.

PAIVA, Valéria and PEREIRA, L.Carlos. A New Proof System for Intuitionistic Logic. *The Bulletin of Symbolic Logic*. 1(1):101, 1995 (abstract).

PAIVA, Valéria; ALECHINA, N. and RITTER, Eike. Relating Categorical Kripke Semântics for Intuitionistic Modal Logics. Unpublished work, 1997

PEREIRA, L.Carlos and PAIVA, Valéria. A Cut-free Sequent Calculus for the Logic of Constant Domains. 1993

SIMPSON, Alex. *The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic*, PhD.Thesis, University of Edinburgh, 1994.

SOTIROV,V. *Modal Theories with Intuicionistic Logic* - In: Mathematical Logic Proc. Conf. Dedicated to the Memory A.A.Marcov, Sofia, 1980. Sofia, Bulg. Acad. Sci., 1984, 287-303.

TAKEUTI, G. *Proof Theory*. Amsterdam: North-Holland, 1975.

TROELSTRA, A.S. and van DALEN, D. *Constructivism in Mathematics: an Introduction*. vol I, Amsterdam: North-Holland, 1980.

WIJESEKERA, D. Constructive Modal Logics I. *Annals of Pure and Applied Logic*, 50, 1990, p 271-301.