Sobre alguns conceitos fundamentais da metamatemática.

Alfred Tarski, traduzido e comentado por Patrícia Del Nero Velasco[1] e Edelcio Gonçalves de Souza[2]

Resumo

O presente artigo consiste na tradução e conseqüente estudo do texto de Alfred Tarski, *On some fundamental concepts of metamathematics*, no qual o desenvolvimento de estruturas lógicas abstratas torna possível investigações metodológicas concernentes às disciplinas dedutivas concretas.

A primeira tentativa de abordar uma parte da metodologia das ciências dedutivas como ciência dedutiva foi realizada por Tarski em uma conferência para a Sociedade Polonesa de Matemática, em 1928. Conferência essa publicada pela primeira vez em 1930, com o título *Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik* e traduzida para o inglês no livro *Logic, semantic, metamathematics* (cuja primeira edição data de 1956), com o título *On some fundamental concepts of metamathematics*[3]

O objetivo deste artigo é apresentar uma tradução do texto inaugural acima mencionado, seguida por comentários e notas explicativas. No texto em questão, Tarski faz uma primeira introdução à lógica abstrata (ou universal), definindo o significado e estabelecendo as propriedades elementares de alguns importantes conceitos pertencentes às ciências dedutivas, a partir da definição de um sistema lógico constituído somente por sentenças e pelo operador de conseqüência (o qual indica,

[1] Doutoranda do Programa de Estudos Pós-Graduados em Filosofia da PUC-SP.

[2] Programa de Estudos Pós-Graduados em Filosofia da PUC-SP.

[3] Cf. Tarski [6].

dado um conjunto de sentenças, qual é o conjunto que é conseqüência do conjunto dado).

No artigo mencionado, Tarski afirma que as disciplinas dedutivas formalizadas constituem o campo de pesquisa da metamatemática. Portanto, estabelece uma estrutura conceitual abstrata a partir da qual investigações metodológicas posteriores referentes às disciplinas dedutivas concretas podem ser desenvolvidas[4]. As idéias presentes no artigo inaugural foram posteriormente desenvolvidas por Tarski (embora publicadas igualmente em 1930) em outro artigo, intitulado *Fundamental concepts of the methodology of the deductive sciences*[5], no qual o autor apresenta novos resultados e inicia a articulação da idéia de uma *base lógica* (ou lógica subordinada) de um sistema dedutivo. A tradução que se segue inclui as notas de rodapé do autor e do tradutor do texto original, J. H. Woodger (essas últimas, identificadas pela abreviação [JHW]).

Sobre alguns conceitos fundamentais da metamatemática[6]
Alfred Tarski

Nosso objetivo nesta comunicação é definir o significado, e estabelecer as propriedades elementares, de alguns conceitos importantes pertencentes à *metodologia das ciências dedutivas*, a qual, segundo Hilbert, denomina-se comumente por *metamatemática*[7]

---

[4] Deve-se notar que esse trabalho de Tarski é anterior ao ensaio "*The concept of truth in formalized languages*" (1934), no qual sua tese acerca da semântica dos sistemas formais tornou-se célebre.

[5] Cf. Tarski [7].

[6] [JHW] NOTA BIBLIOGRÁFICA. As principais idéias deste artigo foram esboçadas pelo autor em uma conferência para a Sociedade Polonesa de Matemática, Seção Varsóvia, em 1928. Para u m resumo desta conferência procurar por Tarski, A. [11]. A conferência foi apresentada (por J. Lukasiewicz) para a Sociedade Científica de Varsóvia em 27 de Março de 1930; foi publicada com o título 'Über einege fundamentale Begriffe der Metamathematik' em *Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, vol. 23, 1930, cl. iii, p. 22-29.

[7] Muitas idéias e resultados esboçados neste artigo foram apresentados

Disciplinas dedutivas formalizadas constituem o campo de pesquisa da metamatemática, a grosso modo, no mesmo sentido no qual as entidades espaciais formam o campo de pesquisa da geometria. Estas disciplinas são consideradas, do ponto de vista da metamatemática, como conjuntos de *sentenças*. Estas sentenças, as quais (segundo a sugestão de S. Lesniewski) são também chamadas *sentenças significativas*, são elas mesmas consideradas como certas inscrições de uma forma bem definida. O conjunto de todas as sentenças é aqui denotado pelo símbolo 'S'. A partir das sentenças de qualquer conjunto X, outras sentenças podem ser obtidas por meio de certas operações denominadas *regras de inferência*. Estas sentenças são chamadas as *conseqüências do conjunto X*. O conjunto de todas as conseqüências é denotado pelo símbolo 'Cn(X)'[8].

Uma definição exata dos dois conceitos, de sentença e de conseqüência, pode ser dada somente naqueles ramos da metamatemática nos quais o campo de investigação é uma disciplina formalizada concreta. Por conta da generalidade das presentes considerações, entretanto, estes conceitos serão aqui considerados como primitivos e serão caracterizados por meio de uma série de axiomas. Na notação usual da teoria geral dos conjuntos estes axiomas podem ser formulados da seguinte maneira:

Axioma 1. $|S| \leq \aleph_0$.

Axioma 2. Se $X \subseteq S$, então $X \subseteq Cn(X) \subseteq S$.

Axioma 3. Se $X \subseteq S$, então $Cn(Cn(X))=Cn(X)$.

Axioma 4. Se $X \subseteq S$, então $Cn(X)= \bigcup_{Y \subseteq X \text{ e } |Y| < \aleph_0} Cn(Y)$.

Axioma 5. Existe uma sentença $x \in S$ tal que $Cn(\{x\})=S$.

Visando alcançar resultados mais profundos, outros axiomas de uma natureza mais especial são acrescentados a estes. Em contraste ao primeiro grupo de axiomas, aqueles do

de modo mais detalhado em dois artigos posteriores do autor, [7] e [9].

8 [JHW] Muito freqüentemente elas são referidas como *sentenças deriváveis do conjunto X*, enquanto o termo *conseqüências* é reservado para conseqüências semânticas. Ver [10] (onde o termo 'conseqüência lógica' é usado ao invés de 'conseqüência semântica').

segundo grupo aplicam-se, não a todas as disciplinas dedutivas, mas somente àquelas que pressupõem o cálculo sentencial, no sentido que nas considerações relativas a estas disciplinas podemos usar como premissas todas as sentenças verdadeiras do cálculo sentencial[9]. Nos axiomas deste segundo grupo ocorrem como novos conceitos primitivos duas operações por meio das quais a partir de sentenças simples podem ser formadas outras mais complicadas, a saber, as operações de formar implicações e negações. A implicação com o antecedente x e o conseqüente y é aqui denotada pelo símbolo 'c(x,y)', e a negação de x pelo símbolo e 'n(x)'. Os axiomas são como segue[10]:

Axioma 6*. Se $x \in S$ e $y \in S$, então $c(x,y) \in S$ e $n(x) \in S$[11].

Axioma 7*. Se $X \subseteq S$, $y \in S$, $z \in S$ e $c(y,z) \in Cn(X)$, então $z \in Cn(X \cup \{y\})$.

Axioma 8*. Se $X \subseteq S$, $y \in S$, $z \in S$ e $z \in Cn(X \cup \{y\})$, então $c(y,z) \in Cn(X)$[12].

---

9 i.e. todas as sentenças que pertencem ao sistema ordinário (bivalente) do cálculo sentencial; cf. [13], § 2, Def. 5.

10 A numeração dos axiomas do segundo grupo e os teoremas que se seguem deles são distinguidos dos axiomas restantes e teoremas pela presença de um asterisco '*'.

11 Como já explicado, sentenças são aqui reconhecidas como objetos materiais (inscrições). Deste ponto de vista o conteúdo do axioma 6* não corresponde exatamente às propriedades intuitivas dos conceitos ocorridos nele. Não é sempre possível formar a implicação de duas sentenças (elas podem ocorrer em lugares largamente separados). A fim de simplificar o assunto tivemos que cometer um erro na formulação do axioma; este consiste em *identificar sentenças eqüiformes* (como S. Lesniewski as chamou). Este erro pode ser removido interpretando S como o conjunto de todos os tipos de sentenças (e não de sentenças) e modificando de modo análogo o sentido intuitivo dos outros conceitos primitivos. Em relação a isto, por tipo de sentença x entendemos o conjunto de todas as sentenças que são equiformes com x.

12 JHW] O Ax.8* é uma das formulações do que é conhecida na literatura como o teorema da dedução. Este teorema, nesta aplicação para o formalismo

Axioma 9*. Se $x \in S$, então $Cn(\{x, n(x)\})=S$.

Axioma 10*. Se $x \in S$, então $Cn(\{x\}) \cap Cn(\{n(x)\})=Cn(\emptyset)$.

Os axiomas 8* e 10* são satisfeitos somente quando aplicados àquelas disciplinas formalizadas nas sentenças em que nenhuma variável livre ocorre[13]. Ao invés do Ax. 7* e Ax. 8* em sua total generalidade, é suficiente adotar como axiomas os seguintes casos particulares destes enunciados:

Axioma 7'*. Se $x \in S$, $y \in S$, $z \in S$ e $c(y,z) \in Cn(\{x\})$, então $z \in Cn(\{x,y\})$.

Axioma 8'*. Se $x \in S$, $y \in S$, $z \in S$ e $z \in Cn(\{x,y\})$, então $c(y,z) \in Cn(\{x\})$.

Além disso, o Ax. 7'* pode ser equivalentemente substituído por um enunciado algo mais simples:

Axioma 7''*. Se $y \in S$ e $z \in S$, então $z \in Cn(\{y,c(y,z)\})$[14]

---

do *Principia Mathematica*, foi primeiramente estabelecido pelo autor desde 1921 (em conexão com a discussão na monografia de K.Ajdukiewiez [1]); o resultado foi discutido na conferência do autor para o Instituto de Filosofia de Varsóvia, Seção de Lógica, listada pelo título na *Ruch Filozoficzny*, vol.6 (1921-2), p.72a. Subseqüentemente, o teorema da dedução foi freqüentemente aplicado em discussão metamatemática. Assim e.g. alguns teoremas afirmados na nota [12] de A.Lindenbaum e A.Tarski, assim como na nota de A.Tarski [11], foram obtidos com a ajuda essencial deste resultado. Em particular, teorema II na primeira destas notas é simplesmente uma forma específica do teorema da dedução. A demonstração do teorema da dedução para uma teoria formalizada particular é delineada no [8], p.286 (demonstração do teorema 2a). Para referência de outras ocorrências do teorema da dedução na literatura ver a resenha de A.Church (de um livro de W.V.Quine) no *Journal of Symbolic Logic*, vol.12 (1947), pp.60-61.

[13] Isto significa que expressões (funções sentenciais) com variáveis livres não são reconhecidas como sentenças.

[14] [JHW] Em edições anteriores deste artigo foi sugerido que o Ax. 8'* pode ser substituído equivalentemente por um caso particular deste, que é mais fraco que o Ax. 8'*, na realidade pela afirmação obtida do Ax. 8'* considerando *X* como o conjunto vazio (e não um conjunto com um único elemento). Esta afirmação, entretanto, foi demonstrada ser errônea; ver Pogorzelski [4], p. 168. Simplificações possíveis do

Na base destes axiomas uma série de teoremas concernentes aos conceitos envolvidos pode ser provada, por exemplo:

Teorema 1. Se $X \subseteq Y \subseteq S$, então $Cn(X) \subseteq Cn(Y)$.

Teorema 2. Se $X \cup Y \subseteq S$, então $Cn(X \cup Y)=Cn(X \cup Cn(Y))=Cn(Cn(X) \cup Cn(Y))$.

Este teorema pode ser generalizado para cobrir um número arbitrário (até mesmo infinito) de uniões.

Teorema 3*. Se $x \in S, y \in S$ e $z \in S$, então $c(c(x,y), c(c(y,z), c(x,z))) \in Cn(\varnothing)$, $c(x,c(n(x),y)) \in Cn(\varnothing)$ e $c(c(n(x),x),x) \in Cn(\varnothing)$.

Este teorema afirma que toda sentença obtida pela substituição de um dos três axiomas do sistema ordinário do cálculo sentencial, que é devido a J. Lukasiewicz[15], é uma conseqüência do conjunto vazio $\varnothing$ (e portanto é também uma conseqüência de todo conjunto *X* de sentenças). Pelo uso do Ax.7* este teorema pode ser estendido para toda instância de substituição de tautologias, i.e., para toda instância de substituição de sentenças verdadeiras do cálculo sentencial.

Por meio dos conceitos *S* e Cn(X), outros importantes conceitos da metamatemática podem ser definidos. Por exemplo:

Definição 1. Um conjunto *X* de sentenças é denominado um *sistema dedutivo* (ou simplesmente um *sistema*), em símbolos $X \in \mathsf{S}$, se $Cn(X)=X \subseteq S$.

As seguintes propriedades dos sistemas são facilmente provadas:

Teorema 4. Para todo conjunto $X \subseteq S$ existe o menor sistema *Y* que inclui *X*, e de fato $Y = Cn(X)$.

Em conseqüência deste teorema o conjunto $Cn(\varnothing)$ é o menor sistema de todos; este conjunto pode ser chamado o sistema de todas as sentenças logicamente verdadeiras.

Ax. 7 não foram mencionadas em edições anteriores.

[15] Cf. [13], § 2.

Teorema 5. Se $\mathfrak{R} \subseteq S$ e $\mathfrak{R} \neq \varnothing$, então $\cap_{X \in \mathfrak{R}} X \in S$ (a intersecção de qualquer número de sistemas é um sistema).

Teorema 6. Se para qualquer dois sistemas $X \in \mathfrak{R}$ e $Y \in \mathfrak{R}$ existe um sistema $Z \in \mathfrak{R}$ com $X \subseteq Z$ e $Y \subseteq Z$, e $\mathfrak{R} \neq \varnothing$, então $\cup_{X \in \mathfrak{R}} X \in S$.

Teorema 7* (de A. Lindenbaum). Se $\mathfrak{R} \subseteq S$, $|\mathfrak{R}| < \aleph_0$ e $\cup_{X \in \mathfrak{R}} X \in S$, então $\cup_{X \in \mathfrak{R}} X \in \mathfrak{R}$; em outras palavras, nenhum sistema pode ser representado como a união de um número finito de sistemas distintos dele mesmo.

Teorema 8*. Se $\mathfrak{R} \subseteq S$, $|\mathfrak{R}| < \aleph_0$, $Y \in S$, $Y \subseteq \cup_{X \in \mathfrak{R}} X$ e $Y \neq \varnothing$, então existe um sistema $X \in S$ tal que $Y \subseteq X$.

Introduziremos a seguir a noção de *equivalência* (*lógica*), bem como as importantes noções de *consistência* e *completude*.

Definição 2. Os conjuntos *X* e *Y* de sentenças são denominados (*logicamente*) *equivalentes*, em símbolos $X \equiv Y$, se $X \cup Y \subseteq S$ e $Cn(X)=Cn(Y)$.

Definição 3. O conjunto *X* de sentenças é chamado *consistente*, em símbolos $X \in W$, se $X \subseteq S$ e se a fórmula $X \equiv S$ não é satisfeita i.e., se $Cn(X) \neq S$.

Definição 4. O conjunto *X* é dito *completo*, em símbolos $X \in V$, se $X \subseteq S$ e se para todo conjunto $Y \in W$ que inclui X satisfaz a fórmula $X \equiv Y$.

Com a ajuda dos axiomas do segundo grupo é possível mostrar que as definições 3 e 4 concordam com as definições usuais de consistência e completude:

Teorema 9*. $X \in W$ se e somente se $X \subseteq S$ e se para nenhuma sentença $y \in S$ temos $y \in Cn(X)$ e $n(y) \in Cn(X)$.

Teorema 10*. $X \in V$ se e somente se $X \subseteq S$ e se para toda sentença $y \in S$ ao menos uma das fórmulas $y \in Cn(X)$ e $n(y) \in Cn(X)$ é satisfeita.

Os seguintes teoremas são também deriváveis:

Teorema 11. Se $\mathfrak{R} \subseteq W$ e se para toda classe finita $L \subseteq \mathfrak{R}$ existe um conjunto $Y \in \mathfrak{R}$ que satisfaz a fórmula $\cup_{X \in L} X \subseteq Y$, então $\cup_{X \in \mathfrak{R}} X \in W$.

Teorema 12. (de Lindenbaum). Se $X \in W$ então existe um conjunto $Y \in S \cap W \cap V$ tal que $X \subseteq Y$; em outras palavras, todo conjunto consistente de sentenças pode ser aumentado para formar um sistema consistente e completo[16].

Teorema 13*. Considere $X \subseteq S$. Para que $y \in Cn(X)$ é necessário e suficiente que $y \in S$ e que a fórmula $X \cup \{n(y)\} \in W$ não seja satisfeita.

O conceito de completude é freqüentemente confundido com dois outros conceitos, que estão relacionados com ele em conteúdo: o de *categoricidade* e o de *não-ramificabilidade*[17]. A próxima noção a ser definida está intimamente relacionada à de completude:

Definição 5. O *grau de completude* de um conjunto $X \subseteq S$ de sentenças, em símbolos $\gamma(X)$, é o menor número ordinal $\alpha \neq \varnothing$ que satisfaz a seguinte condição: não existe seqüência crescente de conjuntos consistentes não equivalentes X_χ de sentenças do tipo α que comece com *X* i.e., nenhuma seqüência de conjuntos X_χ satisfazendo as fórmulas: $X_0=X$, $X_\chi \subseteq X_\nu \subseteq S$ e $Cn(X_\chi) \neq Cn(X_\nu)$ para $\xi < \eta < \alpha$).

Desta definição, segue que:

Teorema 14. $\gamma(X)=1$ se e somente se $X \equiv S$ i.e., se $X \subseteq S$ e se a fórmula $X \in W$ não é satisfeita); $\gamma(X)=2$ se e somente se $X \in W \cap V$; $\gamma(X)>2$ se e somente se $X \in W - V$.

[16] [JHW] Este teorema foi originalmente estabelecido por Lindenbaum para sistemas incompletos do cálculo sentencial. Quando a demonstração deste foi subsequentemente reconstruída com uma estrutura mais geral, de fato sobre a base do primeiro grupo de nossos axiomas, observou-se que, para assegurar a validade da demonstração, é necessário inserir no conjunto de axiomas uma afirmação de um caráter mais particular que todos os axiomas mencionados, a saber, o Ax. 5. De fato, um enunciado mais fraco de que existe um conjunto finito $X \subset S$ para o qual $Cn(X)=S$ seria suficiente para este propósito. Pode-se notar que, na base de nosso conjunto axiomático total incluindo ambos os grupos de axiomas, o Ax. 5 pode ser derivado de outros axiomas e pode portanto ser omitido.

[17] Cf. as notas concernentes a estas noções no artigo [7], no fim do \S\ 7.

Finalmente introduzimos os seguintes conceitos:

Definição 6. Um conjunto *X* de sentenças é denominado *independente*, em símbolos $X \in \mathsf{U}$, se $X \subseteq S$ e se Y=X sempre segue das fórmulas: $Y \equiv X$ e $Y \subseteq X$.

Definição 7. Um conjunto *Y* de sentenças é denominado uma *base* do conjunto *X* de sentenças, em símbolos $Y \in \mathsf{B}(X)$, se $X \equiv Y$ e $Y \in \mathsf{U}$.

Definição 8}. Um conjunto *Y* de sentenças é denominado um *sistema axiomático finito*}, ou abreviadamente um *sistema axiomático*, do conjunto *X* de sentenças, em símbolos $Y \in \mathsf{A}_X$ (X), se $X \equiv Y$ e $|Y| < \aleph_0$.

Definição 9. Um conjunto *X* de sentenças é dito *finitamente axiomatizável*, ou abreviadamente *axiomatizável*, em símbolos $X \in \mathsf{A}$, se $\mathsf{A}_X (X) \neq \varnothing$.

Teorema 15*. $X \in \mathsf{U}$ se e somente se $X \subseteq S$ e para todo $y \in X$ a fórmula $X\text{-}\{y\} \cup \{\neg y\} \in \mathsf{W}$ é satisfeita.

Teorema 16. Se $X \subseteq S$ e $|X| < \aleph_0$, então existe um conjunto $Y \subseteq X$ tal que $Y \in \mathsf{B}(X)$; i.e., todo conjunto finito de sentenças contém uma base como subconjunto.

Teorema 17*. Se $X \subseteq S$, então $\mathsf{B}(X) \neq \varnothing$; i.e., todo conjunto de sentenças possui uma base.

Teorema 18. As seguintes condições são equivalentes: (1) $X \in \mathsf{A}$; (2) existe um conjunto $Y \subseteq X$, tal que $Y \in \mathsf{A}_X(X)$; (3) $\mathsf{A}_X(X) \cap \mathsf{B}(X) \notin \varnothing$; (4) existe um conjunto $Y \subseteq X$ tal que $|Y| < \aleph_0$ e $Y \in \mathsf{B}(X)$.

Teorema 19*. Para que $X \in \mathsf{A}$ é necessário e suficiente que $X \subseteq S$ e que X não possua base infinita.

Teorema 20*. Seja $X \in \mathsf{S}$; para que $X \in \mathsf{A}$ é necessário e suficiente que não exista classe $\mathfrak{R} \subseteq \mathsf{S}$ que satisfaça as seguintes condições: $X \notin \mathfrak{R}$ e $X = \bigcup_{Y \in \mathfrak{R}} Y$ i.e., que X não possa ser representado como uma soma de sistemas distintos dele próprio).

Teorema 21. Temos que $|S \cap A| \leq \aleph_0$ e $|S - A| \leq |S| \leq 2^{\aleph_0}$; se existe um conjunto infinito $X \in U$, então $|S \cap A| = \aleph_0$; e $|S - A| = |S| = 2^{\aleph_0}$.

Deve-se notar que em quase todas as disciplinas dedutivas conhecidas um conjunto infinito e ao mesmo tempo independente de sentenças pode ser construído, o qual deste modo cumpre as hipóteses da segunda parte do último teorema. Nestas disciplinas existem portanto mais sistemas não-axiomatizáveis do que sistemas axiomatizáveis; sistemas são, desta forma, somente axiomatizáveis em casos excepcionais[18].

Para alguns autores o conceito de independência de um conjunto de sentenças é desenvolvido em várias direções (*independência completa* por E. H. Moore[19], *independência maximal* por H. M. Sheffer[20]). Estas noções não serão discutidas aqui.

Dentro do aparato conceitual deste artigo, podemos continuar as investigações metamatemáticas relacionadas com disciplinas dedutivas concretas. Para este propósito em cada caso singular os conceitos de sentença e de conseqüência devem primeiramente ser definidos. Tomamos, então, como ponto de partida algum conjunto X de sentenças no qual estamos interessados. Investigamos o mesmo do ponto de vista da consistência e axiomatizabilidade; tentamos determinar o grau de completude dele, e possivelmente especificar todos os sistemas, em particular todos os sistemas consistentes e completos, os quais incluem X como um subconjunto[21].

---

[18] Lindenbaum foi o primeiro a chamar a atenção para este fato (em conexão com o cálculo sentencial, ver [13], p. 51), estimulando, assim, o interesse em sistemas não-axiomatizáveis.

[19] *Introduction to a form of general analysis*, New Haven, 1910, p. 82.}.

[20] Sheffer, H. M. [5], p. 32.

[21] [JHW] Para um exemplo de investigações nestas direções que lidam com a mais simples disciplina dedutiva, a saber, o cálculo sentencial, o leitor pode consultar [13]. Alguns resultados concernentes a outras disciplinas dedutivas são brevemente discutidas no [9], \S\ 5.

Notas[22]

1. **Axiomas.** Como podemos ver em *On some fundamental concepts of metamathematics*, a utilização do asterisco na notação tarskiana indica a especificação dos axiomas e teoremas que fazem uso das operações de negação e de implicação.

Aqueles que não contêm asterisco não necessitam dessa especificação, podendo ser usados em sistemas lógicos que prescindam da característica mencionada (i.e., em sistemas mais gerais).

Os axiomas 1 e 6* dizem respeito ao conjunto *S* de sentenças: o axioma 1 afirma que *S*, um conjunto de sentenças significativas de uma dada linguagem, é finito ou enumerável; o axioma 6* introduz as operações de negação e de implicação em *S*.

Em relação ao operador de consequência *Cn*, por outro lado, devem ser considerados os demais axiomas.

O axioma 2 é comumente denominado *axioma da autodedutibilidade*, e afirma que se uma sentença *a* pertence a um conjunto *X*, então essa mesma sentença *a* pertence às conseqüências de *X*. Ou seja: toda sentença pertencente a um dado conjunto é considerada como uma conseqüência deste conjunto.

O axioma 3, denominado *axioma da idempotência*, afirma que as conseqüências das conseqüências de um conjunto *X* é igual às próprias conseqüências de *X*. Em outras palavras: o conjunto das conseqüências de um dado conjunto não pode ser alargado por meio de uma nova aplicação do operador de conseqüência.

---

[22] Estas notas foram baseadas na dissertação de mestrado Estudos de Lógica Abstrata: sobre um artigo inaugural de A. Tarski, de Patrícia Del Nero Velasco. Cf. [14].

O axioma 4 (conhecido como *axioma da compacidade dedutiva*), por sua vez, diz que as conseqüências de um conjunto correspondem à união das conseqüências de todos os seus subconjuntos finitos.

O axioma 5 é denominado *axioma da trivialização*: existe uma sentença *a* tal que as conseqüências do conjunto constituído por *a* correspondem ao conjunto de todas as sentenças de *L*. Em outros termos, dito de maneira não precisa, isto significa que existe uma sentença que trivializa o sistema, ou seja, uma sentença a partir da qual todas as sentenças são conseqüência.

Os axiomas 7* e 8* correspondem ao que comumente chamamos de *Teorema da Dedução*. Os axiomas mencionados seccionam o *Teorema da Dedução* em duas implicações, uma vez que este último é, em geral, enunciado como uma equivalência.

O axioma 9* afirma que as conseqüências de um conjunto que contém uma sentença e a negação dessa correspondem ao conjunto de todas as sentenças do sistema em questão, ou seja, que um conjunto que contém uma sentença qualquer e sua negação é inconsistente.

O axioma 10*, por fim, salienta que a intersecção das conseqüências de um conjunto constituído pela sentença *a* e das conseqüências de um conjunto constituído pela negação de *a* (conjuntos formados por elementos contraditórios) é igual ao conjunto formado pelas conseqüências do vazio.

2. **Demonstração do teorema 1.** Suponha que $X \subseteq Y$ e $a \in Cn(X)$. Assim, pelo axioma 4, $a \in \bigcup_{Z \subseteq X \text{ finito}} Cn(Z)$. Logo, existe $Z \subseteq X$ finito tal que $a \in Cn(Z)$. Assim, existe $Z \subseteq Y$ finito tal que $a \in Cn(Z)$. Portanto, usando novamente o axioma 4, obtemos $a \in Cn(Y)$.

Observação. De acordo com o primeiro teorema, comumente denominado *Lei de monotonicidade*, o operador de conseqüência *Cn*, no domínio dos conjuntos de sentenças, é monotônico, ou seja, se uma sentença *a* pertence às conseqüências do conjunto *X* e *X* está contido em *Y*, então a sentença *a* pertence também às conseqüências do conjunto *Y*. Cabe lembrar que nos estudos posteriores de lógica abstrata a monotonicidade é assumida como axioma, ao invés da compacidade. No entanto, o sistema assim definido é mais fraco que o sistema do presente texto, pois a compacidade não é dedutível da monotonicidade com os outros axiomas.

3. **Demonstração do teorema 2.** A idéia é mostrar, utilizando o teorema 1, que:

$Cn(X \cup Y) \subseteq_{(i)} Cn(X \cup Cn(Y)) \subseteq_{(ii)} Cn(Cn(X) \cup Cn(Y)) \subseteq_{(iii)} Cn(X \cup Y)$

Para (i). $Y \subseteq Cn(Y) \Rightarrow X \cup Y \subseteq X \cup Cn(Y) \Rightarrow Cn(X \cup Y) \subseteq Cn(X \cup Cn(Y))$.

Para (ii). $X \subseteq Cn(X) \Rightarrow X \cup Cn(Y) \subseteq Cn(X) \cup Cn(Y) \Rightarrow Cn(X \cup Cn(Y)) \subseteq Cn(Cn(X) \cup Cn(Y))$.

Para (iii).

$X \subseteq X \cup Y \Rightarrow Cn(X) \subseteq Cn(X \cup Y)$

$Y \subseteq X \cup Y \Rightarrow Cn(Y) \subseteq Cn(X \cup Y)$

$\Rightarrow Cn(X) \cup Cn(Y) \subseteq Cn(X \cup Y) \Rightarrow Cn(Cn(X) \cup Cn(Y)) \subseteq Cn(Cn(X \cup Y)) =_{Ax\,3*} Cn(X \cup Y)$. v

4. **Lemas auxiliares.** Usaremos os seguintes lemas sem demonstração:

Lema 1. Se C é finito e $C \subseteq Cn(A)$, então existe um conjunto B,finito tal que $B \subseteq A$ e $C \subseteq Cn(B)$.

Lema 2. Se $x \in Cn(A)$ e $A \subseteq Cn(B)$ então $x \in Cn(B)$.

Lema 3. $Cn(A) \subseteq Cn(A \cup B)$, i.e., se $x \in Cn(A)$ então $x \in Cn(A \cup B)$.

Lema 4. (Modus Ponens). $y \in Cn(\{x, x \rightarrow y\})$.

Utilizaremos o conectivo " $\rightarrow$ " para a implicação e " $\neg$ " para a negação.

5. **Demonstração do teorema 3*.** Para (i): $((x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z))) \in Cn(\varnothing)$. Temos (a) $b \in Cn(\{a, a \rightarrow b\}) \rightarrow b \in Cn(\{a, a \rightarrow b, b \rightarrow c\})$ e (b) $b \rightarrow c \in Cn(\{b \rightarrow c\}) \rightarrow b \rightarrow c \in Cn(\{a, a \rightarrow b, b \rightarrow c\})$. De (a) e (b) temos (c) $\{b, b \rightarrow c\} \subseteq Cn(\{a, a \rightarrow b, b \rightarrow c\})$. Mas (lema 4) $c \in Cn(\{b, b \rightarrow c\})$, e assim (lema 2), $c \in Cn(\{a \rightarrow b, b \rightarrow c, a\})$. Usando três vezes o axioma 8*, obtemos $(a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)) \in Cn(\varnothing)$.

Para (ii): $(x \rightarrow (\neg x \rightarrow y)) \in Cn(\varnothing)$. $Cn(\{a, \neg a\}) = S$ (axioma 9*) $\rightarrow b \in Cn(\{a, \neg a\})$. Usando duas vezes o axioma 8*, obtemos $a \rightarrow (\neg a \rightarrow b) \in Cn(\varnothing)$.

Para (iii): $((\neg x \rightarrow x) \rightarrow x) \in Cn(\varnothing)$. O axioma 2 afirma que $\{a\} \subseteq Cn(\{a\})$. Logo, $a \in Cn(\{a\})$ e (lema 3) $a \in Cn(\{a\} \cup \{\neg a \rightarrow a\})$. Pelo axioma 8, temos $(\neg a \rightarrow a) \rightarrow a \in Cn(\{a\})$. Concomitantemente, podemos escrever (lema 4) $a \in Cn(\neg a, \neg a \rightarrow a)$. Aplicando o axioma 8, obtemos $(\neg a \rightarrow a) \rightarrow a \in Cn(\{\neg a\})$. Como também $(\neg a \rightarrow a) \rightarrow a \in Cn(\{a\})$, temos que $(\neg a \rightarrow a) \rightarrow a \in Cn(\{a\}) \cap Cn(\{\neg a\})$. Como o axioma 10 afirma que $Cn(\{a\}) \cap Cn(\{\neg a\}) = Cn(\varnothing)$, então temos que $(\neg a \rightarrow a) \rightarrow a \in Cn(\varnothing)$.

Observação. O teorema 3* e o lema de modus ponens permitem a obtenção de resultados que constituem um sistema axiomático para o cálculo proposicional, a saber, (i) $(a \rightarrow (b \rightarrow a)) \in Cn(\varnothing)$, (ii) $(((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c))) \in Cn(\varnothing)$ e (iii) $((a \rightarrow b) \rightarrow ((\neg a \rightarrow b) \rightarrow b)) \in Cn(\varnothing)$. (Para outras axiomáticas ver Mendelson [2].) Desse modo, ao demonstrarmos que os axiomas do cálculo clássico são tautologias na estrutura de Tarski, obtemos que a estrutura tarskiana estudada abrange o sistema axiomático em questão e, portanto, torna-se possível demonstrar todos os teoremas tarskianos (inclusive os que prescindem de asterisco, i.e., os de caráter estritamente abstrato) a partir do cálculo proposicional clássico. Logo, não faremos menção aos teoremas que possuem asterisco.

6. **Demonstração do teorema 4.** Seja Y = Cn(X). Então, Cn(Y) = Cn(Cn(X)) = Cn(X) = Y. Portanto, Y é teoria (no artigo Tarski define *sistema dedutivo* que aqui denominaremos **teoria**) e $X \subseteq Y$ pois $X \subseteq Cn(X)$. Suponha que exista uma teoria Y' tal que $X \subseteq Y' \subseteq Y$. Logo (teorema 1) $Cn(X) \subseteq Cn(Y') \subseteq Cn(Y)$. Mas Cn(Y) = Cn(X). Logo, Cn(Y') = Cn(Y). Como Y e Y' são teorias, Cn(Y) = Y e Cn(Y') = Y'. Então Y = Y'. E segue o resultado.

7. **Demonstração do teorema 5.** É conseqüência imediata do seguinte resultado: (i) Se A e B são teorias, então $A \cap B$ é teoria.

Demonstração de (i). O teorema 1 permite-nos escrever $Cn(A \cap B) \subseteq Cn(A)$ e $Cn(A \cap B) \subseteq Cn(B)$. Logo, $Cn(A \cap B) \subseteq Cn(A) \cap Cn(B)$. Como, por hipótese, A e B são teorias, obtemos que $Cn(A \cap B) \subseteq A \cap B$. Assim (axioma 2), $A \cap B = Cn(A \cap B)$, i.e., $A \cap B$ é teoria.

8. **Demonstração do teorema 6.** Vamos utilizar dois resultados:

(i) Seja $\mathfrak{R} \subseteq \wp(S)$. Se para todo $X,Y \in \mathfrak{R}$ existe um conjunto $Z \in \mathfrak{R}$ tal que $X \subseteq Z$, $Y \subseteq Z$, então para toda subclasse finita L de $\mathfrak{R}$ existe um conjunto $Z \in \mathfrak{R}$ tal que $\bigcup_{V \in L} V \subseteq Z$. (Resultado da teoria de conjuntos que não será demonstrado.)

(ii) Seja $\mathfrak{R} \subseteq \wp(S)$. Para todo $L \subseteq \mathfrak{R}$ finito existe um conjunto $Y \in \mathfrak{R}$ tal que $\bigcup_{X \in L} X \subseteq Y$. Então, $Cn(\bigcup_{X \in \mathfrak{R}} X) = \bigcup_{X \in \mathfrak{R}} Cn(X)$.

Com esses resultados a demonstração do teorema 6 é como se segue: utilizando (i), temos que para toda subclasse finita $L \subseteq \mathfrak{R}$, existe um conjunto $Z \in \mathfrak{R}$ tal que $\bigcup_{V \in L} V \subseteq Z$. Logo, utilizando (ii), temos (*) $Cn(\bigcup_{X \in \mathfrak{R}} X) = \bigcup_{X \in \mathfrak{R}} Cn(X)$. Como $X \in \mathfrak{R}$, X é teoria e, então, Cn(X) = X. Substituindo do lado direito de (*) temos $Cn(\bigcup_{X \in \mathfrak{R}} X) = \bigcup_{X \in \mathfrak{R}} X$ e, portanto, $\bigcup_{X \in \mathfrak{R}} X$ é teoria.

Demonstração de (ii). Considere $x \in Cn(\bigcup_{X \in \mathfrak{R}} X)$. Definimos $A = \bigcup_{X \in \mathfrak{R}} X$. Então, $x \in Cn(A) = \bigcup_{A' \subseteq A,\ \text{finito}} Cn(A')$. Logo, existe $A' \subseteq A$ finito tal que $x \in Cn(A')$. Então $A' \subseteq \bigcup_{X \in \mathfrak{R}} X$ finito. Como A' é finito, existe $L \subseteq \mathfrak{R}$ finito tal que $A' \subseteq \bigcup_{X \in L} X$. Como L é finito, por hipótese, existe $Y \in \mathfrak{R}$ tal que $\bigcup_{X \in L} X \subseteq Y$. Assim, $A' \subseteq Y$ e, então, $Cn(A') \subseteq Cn(Y)$. Portanto, $x \in Cn(Y)$ e como $Y \in \mathfrak{R}$, temos que $x \in \bigcup_{X \in \mathfrak{R}} Cn(X)$. Considere agora $x \in \bigcup_{X \in \mathfrak{R}} Cn(X)$. Então, existe $X' \in \mathfrak{R}$ tal que $x \in Cn(X')$. Como $X' \subseteq \bigcup_{X \in \mathfrak{R}} X$, então $Cn(X') \subseteq Cn(\bigcup_{X \in \mathfrak{R}} X)$. Logo, $x \in Cn(\bigcup_{X \in \mathfrak{R}} X)$.

9. **Demonstração do teorema 11.** Vamos utilizar o seguinte resultado:

(i) O conjunto A é consistente se e somente se todo subconjunto finito de A é consistente.

Com esse resultado a demonstração do teorema 11 é como segue: suponha por absurdo que $\bigcup_{X \in \mathfrak{R}} X$ é inconsistente. Assim, por (i), existe $A \subseteq \bigcup_{X \in \mathfrak{R}} X$ finito e inconsistente. Como A, é finito, existe uma subclasse $L \subseteq \mathfrak{R}$ finita tal que $A \subseteq \bigcup_{X \in L} X$. Logo, por hipótese, existe $Y \in \mathfrak{R}$ e portanto consistente tal que $\bigcup_{X \in L} X \subseteq Y$. Assim, $A \subseteq Y$ e novamente por (i), Y é inconsistente (contradição!).

Demonstração de (i). Considere $A' \subseteq A$ tal que A' é inconsistente. Logo, $Cn(A') = S$. Como $A' \subseteq A$, então, $Cn(A') \subseteq Cn(A)$. Temos então que $S = Cn(A') \subseteq Cn(A) \subseteq S$. Logo, $Cn(A) = S$.

Considere, agora, $A \subseteq S$ inconsistente, i.e., $Cn(A) = S$. Assim, $S = \bigcup_{A' \subseteq A,\ \text{finito}} Cn(A')$. Seja $a \in S$ tal que $Cn(\{a\}) = S$, cuja existência é dada pelo axioma 5. Portanto, existe $A' \subseteq A$ finito tal que $a \in Cn(A')$. Então, $\{a\} \subseteq Cn(A')$ e, portanto, $S = Cn(\{a\}) \subseteq Cn(Cn(A')) = Cn(A')$. Assim, $Cn(A') = S$ e $A' \subseteq A$ finito.

10. **Conjunto Completo.** Diz-se que um conjunto é completo se para todo conjunto consistente do qual esse primeiro é subconjunto, tem-se que tais conjuntos são equivalentes. No entanto, podemos caracterizar um conjunto completo do seguinte modo: (i) X é completo se e somente se para todo $x \notin Cn(X)$, $Cn(X \cup \{x\}) = S$.

Demonstração. Seja $X \subseteq S$. Se X é inconsistente, então ambos os lados da equivalência são satisfeitos e não há mais nada a demonstrar. Consideremos, então, X consistente, i.e., $Cn(X) \neq S$. Suponha que X é completo e seja $x \notin Cn(X)$. Suponha, por absurdo, que $Cn(X \cup \{x\}) \neq S$. Assim, $X \cup \{x\}$ é consistente e $X \subseteq X \cup \{x\}$. Como X é completo, $Cn(X) = Cn(X \cup \{x\})$. Mas $x \in Cn(\{X \cup \{x\})$ e, portanto, $x \in Cn(X)$ (contradição!). Suponha, agora, que para todo $x \notin Cn(X)$, $Cn(X \cup \{x\}) = S$. Seja Y consistente tal que $X \subseteq Y$. Suponha, por absurdo, que $Cn(X) \neq Cn(Y)$. Por monotonicidade, $Cn(X) \subseteq Cn(Y)$, e então existe $x \in Cn(Y)$ tal que $x \notin Cn(X)$. Logo, por hipótese, $Cn(X \cup \{x\}) = S$. Mas, $X \cup \{x\} \subseteq Cn(Y)$ e, assim, $Cn(X \cup \{x\}) \subseteq Cn(Cn(Y)) = Cn(Y)$. Então, $S \subseteq Cn(Y)$, e, portanto, $Cn(Y) = S$ (contradição!).

11. **Demonstração do teorema 12.** Vamos utilizar o seguinte resultado:

(i) X é teoria consistente e completa se e somente se X é consistente e para toda $x \in S$, ou $x \in X$ ou $Cn(X \cup \{x\}) = S$.

Com esse resultado a demonstração do teorema 12 é como segue: como, pelo axioma 1, S é enumerável, seja a_1, a_2,..., a_n,... uma enumeração das sentenças de S. Construiremos, a partir de um conjunto consistente X, uma seqüência infinita de conjuntos X_i ($i \in \mathbb{N}$). Definimos:

$X_0 = X$

$X_1 = X_0 \cup \{a_1\}$, se $X_0 \cup \{a_1\}$ é consistente}, ou
$X_1 = X_0$, em caso contrário.
$X_2 = X_1 \cup \{a_2\}$, se $X_1 \cup \{a_2\}$ é consistente, ou

$X_2 = X_1$,em caso contrário.

.

.

.

$X_n = X_{n-1} \cup \{a_n\}$, se $X_{n-1} \cup \{a_n\}$ é consistente}, ou
$X_n = X_{n-1}$,em caso contrário

.

.

.

Seja $\mathfrak{R} = \{X_0, X_1, X_2,...\}$ e $Y = \cup_{i \in N} X_i$. Por construção, temos os seguintes resultados:

(1) $X_i \subseteq X_{i+1}$ (visto que $X_{i+1} = X_i \cup \{a_{i+1}\}$ ou $X_{i+1} = X_i$);

(2) Se $i \subseteq j$, então $X_i \subseteq X_j$;

(3) $X_i \subseteq Y$;

(4) Se $L \subseteq \mathfrak{R}$ finito, então existe $i \in N$ tal que $\cup L \subseteq X_i$;

(5) $\forall i \in N$, X_i é consistente. (De fato, por construção, $X_i = X_{i-1} \cup \{a_i\}$, se $X_{i-1} \cup \{a_i\}$ é consistente, e nesse caso, X_i é consistente; ou $X_i = X_{i-1}$, e nesse caso, como o anterior é consistente, X_i também o é.) Portanto, $\mathfrak{R} \subseteq$ CNS.

Por (4), (5) e o teorema 11, $\cup\mathfrak{R} = \cup_{i \in N} X_i = Y$ é consistente.

Agora, suponha, por absurdo, que $x \notin Y$ e $Cn(Y \cup \{x\}) \neq S$. Assim, $x \notin X_i$ e, por construção, $Cn(X_{i-1} \cup \{x\}) = S$. Mas $X_{i-1} \cup \{x\} \subseteq Y \cup \{x\}$, e assim, $Cn(X_{i-1} \cup \{x\}) \subseteq Cn(Y \cup \{x\})$. Portanto, $S = Cn(X_{i-1} \cup \{x\}) \subseteq Cn(Y \cup \{x\}) \neq S$ (contradição!). Logo, $x \in Y$ ou $Cn(Y \cup \{x\}) = S$ e, por (i), Y é uma teoria consistente e completa.

Demonstração de (i). Seja X uma teoria consistente e completa. O conjunto X, por hipótese, é consistente. Seja $x \in S$. Se $x \in X$, então segue o resultado. Se $x \notin X$, então $x \notin Cn(X)$, pois X é teoria. Como também X é completo, pelo resultado (i) da nota 10, $Cn(X \cup \{x\}) = S$.

Seja, agora, X consistente tal que para toda $x \in S$, ou $x \in X$ ou $Cn(X \cup \{x\}) = S$. Por hipótese, X é consistente. Suponha, por absurdo, que X não é teoria, i.e., $X\ ^1\ Cn(X)$. Logo, existe $x \in Cn(X)$ tal que $x \notin X$. Assim, $Cn(X \cup \{x\}) = S$. Mas $Cn(X \cup \{x\}) =_{teo\ 2} Cn(Cn(X) \cup \{x\}) = Cn(Cn(X)) = Cn(X)$, e, portanto, $Cn(X) = S$ (contradição!).

Logo, X é teoria. Para mostrar que X é completo, reescreveremos o resultado (i) da nota 10: X é completo se e somente se para todo $x \in S$, se $X \notin Cn(X)$ então $Cn(X \cup \{x\}) = S$. Suponha, assim, que $x \notin Cn(X)$. Como X é teoria, $x \notin X$ e, por hipótese, obtemos $Cn(X \cup \{x\}) = S$. Logo, X, é completo.

12. **Conjunto independente.** Um conjunto é chamado independente se e somente se não é equivalente a nenhum de seus subconjuntos próprios. Contudo, há outras caracterizações para tal: (i) As seguintes condições são equivalentes: a. X é independente; b. $\forall Y \subseteq X$, $X \cap Cn(Y) \subseteq Y$; c. $\forall x \in X$, $x \notin Cn(X - \{x\})$.

A terceira condição é a comumente usada na literatura.

Demonstração de (i). A idéia é mostrar que (a) $\rightarrow$ (b) $\rightarrow$ (c) $\rightarrow$ (a).

(a) $\rightarrow$ (b) Suponha X independente e seja Y um subconjunto qualquer de X. Utilizando o teorema 2, temos: $Cn((X\text{-}Cn(Y)) \cup Y) = Cn((X - Cn(Y)) \cup Cn(Y)) = Cn(X \cup Cn(Y)) = Cn(X \cup Y) =_{X \subseteq Y} Cn(X)$. Como $(X - Cn(Y)) \cup Y \subseteq X$ e X é independente, $(X - Cn(Y)) \cup Y = X$. Mas $Y \subseteq X$. Logo, pela proposição conjuntista que afirma que se $(A - B) \cup C = A$, $C \subseteq A$ então $(A \cap B) \subseteq C$, obtemos $X \cap Cn(Y) \subseteq Y$.

(b) $\rightarrow$ (c) Suponha (b) e que $\forall x$, $x \in X$. Como $(X - \{x\}) \subseteq X$, temos, por hipótese, $X \cap Cn(X - \{x\}) \subseteq (X - \{x\})$ e, assim, $\{x\} \cap X \cap Cn(X - \{x\}) = \varnothing$. Como $x \in \{x\}$ e $x \in X$, necessariamente $x \notin Cn(X - \{x\})$.

(c) $\rightarrow$ (a) Suponha, agora, que $\forall x \in X$, $x \notin Cn(X - \{x\})$. Suponha, por absurdo, que X não é independente, i.e., existe um

Y tal que $Cn(X) = Cn(Y)$, $Y \not\subset X$. Então, $\exists x \in X$, $x \notin Y$. Como $x \in X$, $x \in Cn(X)$ e, assim, $x \in Cn(Y)$. Como $Y \subseteq X$ e $x \notin Y$, então também $Y \subseteq X - \{x\}$, e $Cn(Y) \subseteq Cn(X - \{x\})$. Logo, $x \in Cn(X - \{x\})$ (contradição!).

13. **Demonstração do teorema 16.** Seja *X* um conjunto finito, ou seja, $X = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Vamos construir uma seqüência finita de conjuntos $A_0, A_1, ..., A_n$ de acordo com a seguinte regra:

$A_0 = X$

$A_1 = A_0 - \{p_1\}$, se $p_1 \in Cn(A_0 - \{p_1\})$
$A_1 = A_0$,caso contrário
$A_n = A_{n-1} - \{p_n\}$, se $p_n \in Cn(A_{n-1} - \{p_n\})$
$A_n = A_{n-1}$ caso contrário

Por construção, $\forall P_i \in An$, temos que $p_i \notin Cn(An - \{p_i\})$. Pelo resultado (i) da nota 12, A_n é independente. Resta provarmos que $Cn(A_n) = Cn(X)$. Para tanto, mostraremos que $Cn(A_i) = Cn(A_{i-1})$, $1 \leq i \leq n$. Considere, então, os conjuntos A_i e A_{i-1}. Temos duas possibilidades: (i) $A_i = A_{i-1}$, e nesse caso, como o operador de conseqüência é uma função, $Cn(A_i) = Cn(A_{i-1})$; (ii) $A_i = A_{i-1} - \{p_i\}$, e nesse caso, $p_i \in Cn(A_{i-1} - \{p_i\})$. Assim, $p_i \in Cn(A_i)$. Como $A_i = A_{i-1} - \{p_i\}$, temos que $A_{i-1} = A_i \cup \{p_i\}$. Portanto, $Cn(A_{i-1}) = Cn(A_i \cup \{p_i\}) = Cn(\{p_i\} \cup A_i) = Cn(\{p_i\} \cup Cn(A_i)) =p_i \in Cn(A_i)\ Cn(Cn(A_i)) = Cn(A_i)$. Logo, podemos escrever: $Cn(A_n) = Cn(A_{n-1}) = Cn(A_{n-2}) =...= Cn(A_{n-n}) = Cn(A_0) = Cn(X)$.

14. **Observação.** Deve-se notar que, no sistema lógico apresentado, o conjunto de sentenças *S* é axiomatizável. Observação que é justificada pelo axioma 5, o qual afirma que existe uma sentença *a* tal que *Cn({a}) = S*. Dessa forma, como existe um conjunto *{a}* finito e equivalente a *S*, temos que *{a}* é um sistema axiomático de *S*, e, portanto, *S* é axiomatizável. Em sistemas lógicos que prescindem do axioma da trivialização, faz-se necessário introduzir nos teoremas cujas demonstrações comumente fazem uso desse axioma, o conjunto *S* de todas as sentenças como axiomatizável. Deste modo, garantimos a

existência de um conjunto que é sistema axiomático finito de *S*, ou seja, de um conjunto finito que é equivalente a *S*.

15. **Demonstração do teorema 18.** A idéia é mostrar que (i) → (ii) → (iii) → (iv) → (i).

(i) → (ii) Seja X axiomatizável. Portanto, existe um Z que é sistema axiomático de X, ou seja, Cn(X) = Cn(Z) e Z é finito. Como Z ⊆ Cn(Z), temos que Z ⊆ Cn(X). Assim, pelo lema 1, existe um conjunto Y finito tal que Y ⊆ X e Z ⊆ Cn(Y). Logo, Cn(Y) ⊆ Cn(X). Como Z ⊆ Cn(Y), Cn(Z) ⊆ Cn(Cn(Y)) = Cn(Y) e, assim, Cn(Z) ⊆ Cn(Y) ⊆ Cn(X). Portanto, Cn(Y) = Cn(X).

(ii) → (iii) Suponha que há um conjunto Y ⊆ X tal que Cn(Y) = Cn(X) e Y é finito. Pelo teorema 16, existe um conjunto Z ⊆ Y tal que Z é base de Y, i.e., Cn(Y) = Cn(Z) e Z é independente. Assim, Cn(X) = Cn(Z) e, por conseguinte, Z é base de X. Mas Z é finito (pois Z ⊆ Y finito). Logo, Z é axiomatizável.

(iii) → (iv) Suponha que existe um conjunto Z tal que Z é axiomatizável e base de X. Demonstraremos que (1) existe um conjunto Y ⊆ X tal que Y é finito, (2) Y, é base de X.

Para (1). Por hipótese, Cn(X) = Cn(Z), Z é finito e independente. Como Z ⊆ Cn(Z), Z ⊆ Cn(X). Mas Z é finito. Logo, pelo lema 1, existe um conjunto V finito tal que V ⊆ X e Z ⊆ Cn(V). Como V é finito, pelo teorema 16, existe um conjunto Y ⊆ V tal que Y é base de V. Como Y ⊆ V, V é finito e V ⊆ X, então Y é finito e Y ⊆ X.

Para (2). Como Y é base de V, Cn(Y) = Cn(V) e Y é independente. Por outro lado, como Z ⊆ Cn(V), Cn(Z) ⊆ Cn(Cn(V)) = Cn(V). Como V ⊆ X, Cn(V) ⊆ Cn(X). Mas Cn(X) = Cn(Z) e, assim, Cn(V) = Cn(Z). Temos, então: Cn(Y) = Cn(V) = Cn(Z) = Cn(X). Logo, Y é base de X.

(iv) $\rightarrow$ (i) Suponha que Y é finito e base de X. Logo, Cn(Y) = Cn(X). Portanto, Y é um sistema axiomático de X, e assim, X é axiomatizável.

16. **Demonstração do teorema 21.** Em primeiro lugar, notemos que $S \cap A$ é a classe dos Cn(X) tal que X é finito. Mas, como $|S| \leq \aleph_0$, então $|\{X{:}X \text{ é finito}\}| \leq \aleph_0$. Logo, $|S \cap A| \leq \aleph_0$. Por outro lado, $S - A \subseteq S \subseteq \wp(S)$. Como $|S| \leq \aleph_0$ (axioma 1), então $|\wp(S)| \leq 2^{\aleph_0}$ (teorema de Cantor). Portanto, $|S - A| \leq |S| \leq 2^{\aleph_0}$. Para as igualdades, ver Tarski [7], corolário 37.

Referências Bibliográficas

[1] Ajdukiewicz, K., *Z metodologji nauk dedukcyjnych* (Da metodologia das ciências dedutivas), Lwów, 1921.

[2] Mendelson, Elliott, *Introduction to mathematical logic*, the Wadsworth & Brooks, California, 1987.

[3] Moore, E.H., *Introduction to a form of general analysis*, New Haven, 1910, p. 82.

[4] Pogorzelski, W. A. "Przeglad twierdzen o dedukcjidla rachunku zdan", (Uma investigação dos teoremas da dedução para o cálculo sentencial, em Polônia), *Studia Logica*,15, (1964), pp. 163-79.

[5] Sheffer, H. M., *The general theory of notational relativity*, Mass., Cambridge, 1921, p. 32.

[6] Tarski, A., "On some fundamental concepts of metamathematics" in *Logic, semantics, metamathematics*, Hackett Publishing Company, 1983, pp. 30-37.

[7] Tarski, A., "Fundamental concepts of the methodology of the deductive sciences" in *Logic, semantics, metamathematics*, Hackett Publishing Company, 1983, pp. 60-109.

[8] Tarski, A., "Some observations on the concepts of - consistency and ω-completeness" in *Logic, semantics,*

metamathematics, Hackett Publishing Company, 1983, pp. 279-95.

[9] Tarski, A., "Foundations of the calculus of systems", in *Logic, semantics, metamathematics*, Hackett Publishing Company, 1983, pp. 342-383.

[10] Tarski, A., "On the concepts of logical consequence" in *Logic, semantics, metamathematics*, Hackett Publishing Company, 1983, pp. 409-420.

[11] Tarski, A., "Remarques sur les notions fondamentales de la méthodologie des mathématiques", Ann. Soc. polon. math., vii (1929), pp. 270-2.

[12] Tarski, A. e Lindenbaum, A., "Sur l' indépendance des notions primitives dans les systèmes mathématiques", Ann. Soc. polon. math., v (1927), pp. 111-13.

[13] Tarski, A. e J. Lukasiewicz, "Investigations into the sentential calculus" in *Logic, semantics, metamathematics*, Hackett Publishing Company, 1983, pp. 38-59.

[14 Velasco, Patrícia Del Nero, *Estudos de Lógica Abstrata: sobre um artigo inaugural de A. Tarski*. Dissertação de mestrado, Programa de Estudos Pós-Graduados em Filosofia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000.