UMA HEURÍSTICA PLATÔNICA PARA TERNOS PITAGÓRICOS

John A. Fossa
Glenn W. Erickson

Abstract
In The Republic, Plato presents the analogy of the divided line in order to unify his ontological, epistemological and cosmological doctrine. It is rarely noted, however, that the divided line has mathematical applications. In this paper, we explore the relationship of the divided line to the problem of deriving Pythagorean triples, that is, sets of three integers that serve as the sides of Pythagorean triangles. We also note the significance of this application within a broader context.

Na *República*, Platão apresenta a analogia da linha dividida para sintetizar sua doutrina ontológica, epistemológica e cosmológica. Em conseqüência, virtualmente todos os comentadores de Platão têm dedicado, merecidamente, longas explicações a esse passagem. Ninguém, porém, tem notado que a analogia da linha dividida tem uma aplicação ao seguinte importante problema matemático relacionado ao Teorema de Pitágoras. Os comentadores não vislumbram a referida aplicação porque não tomaram a matemática platônica a sério. Em ERICKSON e FOSSA (1996), porém, mostramos como a matemática platônica é uma parte integral da sua doutrina e que há uma interrelação surpreendente entre as várias passagens matemáticas platônicas. O fato de que a linha tem este elenco variado de aplicações, deveria ter levado Platão a vê-la como uma estrutura básica do universo.

Voltando nossa atenção para o problema em tela, lembramos que havia na Antigüidade três fórmulas interessantes para gerar *ternos pitagóricos*, ou seja, três números inteiros que medem os lados de um triângulo retângulo. É claro que os termos de um terno pitagórico (a,b,c) são relacionados pelo Teorema de Pitágoras: $a^2+b^2=c^2$, onde *a* e *b* são os catetos do triângulo e *c* é a sua hipotenusa. No presente trabalho, (a,b,c) representará um terno pitagórico em que $a<b<c$; assim, *c* sempre representará a hipotenusa.

A primeira das referidas fórmulas, atribuída a Pitágoras, pode ser formulada da seguinte maneira: se $n \in N$,

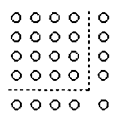
$$(2n+1, \tfrac{1}{2}(2n+1)^2-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}(2n+1)^2+\tfrac{1}{2})$$

é um terno pitagórico. A fórmula gera um terno para todo inteiro ímpar maior ou igual a três e, em todo terno gerado pela fórmula, temos $c-b=1$. Listamos a seguir os seis ternos pitagóricos (a,b,c) com $a<b$ e $c<100$, dados pela regra atribuída ao Pitágoras:

1. (3,4,5)
2. (5,12,13)
3. (7,24,25)
4. (9,40,41)
5. (11,60,61)
6. (13,84,85).

HEATH (1981) sugere que a fórmula poderia ter sido descoberta pela examinação de dois quadrados figurados sucessivos.

Desde que o gnômon acrescentado ao quadrado de lado *k* para obter o quadrado de lado k+1 é o número ímpar 2k+1, basta deixar o gnômon ser um número quadrado (isto é, $2k+1=n^2$) e resolver para *k*.



No exemplo acima, $2k+1=9=3^2$ e temos $3^2+4^2=5^2$. A sugestão de Heath, porém, não parece inteiramente convincente porque a fórmula de Pitágoras vale para todo número ímpar (maior que 1) e não somente os que são também números quadrados. Achamos mais provável que Pitágoras (ou os seus predecessores babilônicos) notou que, nos triângulos em tela, $a^2=b+c$ onde $c=b+1$. Desde que a é ímpar, a^2 também será ímpar. Mas, a caracterização pitagórica de números ímpares consiste precisamente no fato de que não podem ser divididos em dois números iguais, pois sempre resta um seixo. Assim, dado um número ímpar, Pitágoras teria achado o seu quadrado e dividido este quadrado em partes que diferem por um único seixo. As referidas partes fornecem o cateto maior e a hipotenusa do triângulo procurado. Por exemplo, $11^2=121=60+61$; portanto, (11,60,61) é um terno pitagórico. Depois de ter feito este raciocínio, a sugestão de Heath seria uma maneira pitagórica natural para fazer uma demonstração figurada do teorema.

A segunda fórmula a que nos referimos acima é atribuída a Platão. Pode ser formulada da seguinte maneira: se $n \in N-\{1\}$,

$$(2n, n^2-1, n^2+1)$$

é um terno pitagórico. Em contraste à fórmula de Pitágoras, a fórmula de Platão gera ternos pitagóricos em que a é par e $c-b=2$. Ao exemplo do que fizemos para ternos gerados pela fórmula de Pitágoras, listamos a seguir os oito ternos (a,b,c), gerados pela fórmula de Platão, com $a<b$ (excepcionalmente $a>b$ para $n=2$) e $c<100$:

1. (4,3,5)
2. (6,8,10)
3. (8,15,17)
4. (10,24,26)
5. (12,35,37)
6. (14,48,50)
7. (16,63,65)
8. (18,80,82)

Mais uma vez, Heath sugere que a fórmula poderia ter sido descoberta considerando dois quadrados de lados k e $k+2$, bem como os dois gnômons usados para formar este daquele. Omitiremos aqui os detalhes. Observamos que o consenso dos historiadores da matemática parece ser que o resultado de Platão "é apenas uma versão ligeiramente modificada de um resultado já conhecido pelos babilônios e pitagóricos" (BOYER, 1983; pág. 65). Assim, a fórmula de Pitágoras e a de Platão são vistas como complementares, porém insuficientes para gerar todos os ternos pitagóricos.

Para ter uma idéia melhor da relação entre as duas fórmulas e os ternos não gerados por elas, listaremos todos os ternos com $c<100$. Antes, porém, definiremos um conceito que nos ajudará a organizar toda esta informação. O referido conceito é o de *terno pitagórico primitivo* que é um terno pitagórico (a,b,c) em que o M.D.C.{a,b}=1 — portanto, M.D.C.{a,b,c}=1. Deveria ser claro que se um terno (a,b,c) não é primitivo, então é um múltiplo de um terno primitivo (d,e,f); desta forma (a,b,c)=(kd,ke,kf) para qualquer $k\in N$. Assim, os 50 ternos pitagóricos (a,b,c) com $a<b$ e $c<100$, agrupados segundo os 16 ternos primitivos com $c<100$, são:

1.1. (3,4,5)
1.2. (6,8,10)
1.3. (9,12,15)
1.4. (12,16,20)
1.5. (15,20,25)
1.6. (18,24,30)
1.7. (21,28,35)
1.8. (24,32,40)
1.9. (27,36,45)
1.10. (30,40,50)
1.11. (33,44,55)
1.12. (36,48,60)
1.13. (39,52,65)
1.14. (42,56,70)
1.15. (45,60,75)
1.16. (48,64,80)
1.17. (51,68,85)
1.18. (54,72,90)

2.1. (5,12,13)
2.2. (10,24,26)
2.3. (15,36,39)
2.4. (20,48,52)
2.5. (25,60,65)
2.6. (30,72,78)
2.7. (35,84,91)

3.1. (7,24,25)
3.2. (14,48,50)
3.3. (21,72,75)

4.1. (8,15,17)
4.2. (16,30,34)
4.3. (24,45,51)
4.4. (32,60,68)
4.5. (40,75,85)

6.1. (11,60,61)

7.1. (12,35,37)
7.2. (24,70,74)

8.1. (13,84,85)

9.1. (16,63,65)

10.1. (20,21,29)
10.2. (40,42,58)
10.3. (60,80,82)

11.1. (28,45,53)

12.1. (33,56,65)

13.1. (36,77,85)

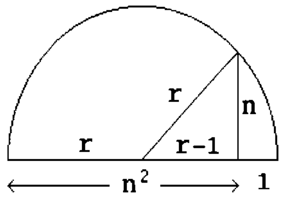
1.19. (57,76,95)	5.1. (9,40,41)	14.1 (39,80,89)
	5.2. (18,80,82)	15.1. (48,55,73)
		16.1. (65,72,97)

Desta listagem constatamos que há até ternos pitagóricos primitivos que não são gerados pelas fórmulas. O terno (20,21,29), por exemplo, não é gerado pela fórmula de Pitágoras desde que c-b¹1 e não é gerado pela fórmula de Platão desde que $c-b\neq 2$.

Em ERICKSON e FOSSA (1996), mostramos que a alegoria platônica da "linha dividida" é relacionada ao Teorema de Platão, o que afirma, em parte, que entre cada dois números quadrados há uma (única) média geométrica integral. De fato, mostramos que se x/u/v/y é uma linha dividida segundo as especificações de Platão, então u=v e *u* é a média geométrica de *x* e *y* (isto é, $u^2=xy$). Mostramos ainda que quando x=1, a linha dividida se reduz a forma elegante de $1/n/n/n^2$, onde, é claro, $n\in N$ e detectamos várias linhas divididas desta natureza, representando vários conceitos platônicos, na estrutura matemática ("a pirâmide platônica"). Curiosamente, estas linhas divididas também têm uma relação estreita com os ternos pitagóricos gerados pela fórmula de Platão. De fato, dado $1/n/n/n^2$, $(n+n,n^2-1,n^2+1)$ será uma terno pitagórico, mas esta fórmula é precisamente a fórmula de Platão: $(2n,n^2-1,n^2+1)$. Começando, por exemplo, da linha dividida 1/6/6/36, geramos um terno deixando a=2x6, b=36-1, c=36+1. Relacionamos a seguir os ternos gerados pela fórmula de Platão (para c<100) com as linhas divididas geradores:

	1/1/1/1	
	1/2/2/4	(4,3,5)
	1/3/3/9	(6,8,10)
	1/4/4/16	(8,15,17)
	1/5/5/25	(10,24,26)
	1/6/6/36	(12,35,37)
	1/7/7/49	(14,48,50)
	1/8/8/64	(16,63,65)
	1/9/9/81	(18,80,82)
e, em geral,	$1/n/n/n^2$	$(2n,n^2-1,n^2+1)$.

O caso n=1 não gera um terno, mas a razão da sua inclusão aqui será esclarecida logo. Primeiro, porém, queremos sugerir que foi do estudo intensivo das propriedades das linhas divididas que nasceu a fórmula de Platão para ternos pitagóricos. As linhas divididas eram objetos que mereceram escrutínio cuidadoso, pois estruturaram a ontologia, epistemologia e cosmologia platônicas. Ainda mais, seria natural ligar as linhas divididas com triângulos retângulos através do diagrama de Pappus, que é usado para construir a média geométrica de dois extremos (veja ERICKSON e FOSSA). Assim, se nossa linha dividida é $1/n/n/n^2$, *n* é a média entre o termo extremo pequeno 1 e o termo extremo grande n^2. Justapomos estes dois extremos para formar a base de uma semicircunferência de raio r; então a média geométrica, *n*, será dada pela perpendicular à base, no onto da junção dos extremos, conforme ilustrado pela figura.



Desde que o raio *r* da semicircunferência discutida no parágrafo anterior é igual a $½(n^2+1)$, *r* será integral quando *n* (e, portanto, n^2) for ímpar. Assim, o diagrama de Pappus nos fornece um outro triângulo retângulo associado às linhas divididas. Dada, por exemplo, a linha dividida ímpar (isto é, *n* ímpar) 1/5/5/25, c=r=½(25+1)=13; b=13-1=12; e a=5. Portanto, o terno (5,12,13) é associado à referida linha dividida. Conforme a nossa prática anterior, calculamos os triângulos achados nos diagramas de Pappus com c<100 para as linhas divididas ímpares:

1/3/3/9	(3,4,5)
1/5/5/25	(5,12,13)
1/7/7/49	(7,24,25)
1/9/9/81	(9,40,41)
1/11/11/121	(11,60,61)
1/13/13/169	(13,84,85)

Que surpresa! Os ternos pitagóricos achados dentro do diagrama de Pappus referentes às linhas divididas ímpares são exatamente os que são gerados pela fórmula de Pitágoras — pelo menos, para os casos com $c<100$. Será que é sempre o caso? Desde que n é um inteiro ímpar maior do que 1, deixamos $n=2k+1$ onde kÎN. Então, pelo teorema de Pitágoras $r^2=n^2+(r-1)^2=(2k+1)^2+(r-1)^2$. Resolvendo para r, achamos $c=r=½(2k+1)^2+½$ e isto implica que o outro cateto é $b=r-1=½(2k+1)^2-½$. Mas estes valores são precisamente os dados pela fórmula de Pitágoras.

O que acontece quando a linha dividida é par? Para n par, n^2+1 é ímpar e, portanto, $r=½(n^2+1)$ não é integral. Assim, o triângulo dentro do diagrama de Pappus não terá lados integrais. O denominador, porém, é sempre 2 e, portanto, se multiplicamos todos os lados por 2, acharemos um triângulo retângulo com lados integrais. Com efeito, desde que n é par, $n=2k$ e $r^2=n^2+(r-1)^2=(2k)^2+(r-1)^2$. Portanto, $r= ½(4k^2+1)$ e $r-1=½(4k^2-1)$. Lembrando que $n=2k$, ou seja $n^2=4k^2$, temos $r=½(n^2+1)$ e $r-1=½(n^2-1)$. Assim, os triângulos dentro dos diagramas de Pappus referentes a linhas divididas pares são dados pelo terno $(n,½(n^2-1),½(n^2+1))$. Multiplicando este terno por dois achamos o terno $(2n,n^2-1,n^2+1)$ que não é somente integral, mas também é exatamente a fórmula de Platão!

Dado o exposto, parece razoável supor que Platão, na sua investigação das linhas divididas, notou que para linhas divididas ímpares os triângulos dentro dos diagramas de Pappus eram os que são gerados pela fórmula de Pitágoras. Assim, ele naturalmente investigaria o que acontece com linhas divididas pares, o que levá-lo-ia à sua fórmula para n par. Mas, desde que $(2a,2b,2c)$ será um terno pitagórico sempre que (a,b,c) o é, a sua fórmula também vale para n ímpar. Assim, associados a linhas divididas ímpares temos dois ternos, um dado pela fórmula de Pitágoras e o seu dobro dado pela fórmula de Platão, enquanto para as linhas divididas pares só temos um terno associado — o que é dado pela teorema de Platão.

Uma característica marcante da matemática pitagórica e platônica é a presença ubíqua de algarismos que sistematizam e geram as várias estruturas estudadas. Talvez o gerador mais conhecido seja a unidade como o gerador de todos os números. Uma coisa semelhante acontece com as linhas divididas, 1/1/1/1 sendo o gerador das outras. O algoritmo em questão, que é bastante simples e era bem conhecido na Antiqüidade, implica que a soma do extremo menor com a média será a média entre o extremo menor original e a soma de todas as partes da linha. Na linha 1/2/2/4, por exemplo, o extremo menor é 1 e a média é 2, dando uma soma de 3, enquanto a soma das partes é 1+2+2+4=9. Assim, o novo extremo menor é justamente o extremo menor anterior, ou seja, 1; a nova média é 3; e o novo extremo maior é 9. Isto nos dá uma nova linha dividida 1/3/3/9. Portanto, o algoritmo gera a terceira linha a partir da segunda, e assim por diante. Verificamos o algoritmo para as primeiras nove linhas:

1/1/1/1	⇒	1/1+1/1+1	⇒	1/2/2/4
1/2/2/4	⇒	1/1+2/1+2/1+2+2+4	⇒	1/3/3/9
1/3/3/9	⇒	1/1+3/1+3/1+3+3+9	⇒	1/4/4/16
1/4/4/16	⇒	1/1+4/1+4/1+4+4+16	⇒	1/5/5/25
1/5/5/25	⇒	1/1+5/1+5/1+5+5+25	⇒	1/6/6/36
1/6/6/36	⇒	1/1+6/1+6/1+6+6+36	⇒	1/7/7/49
1/7/7/49	⇒	1/1+7/1+7/1+7+7+49	⇒	1/8/8/64
1/8/8/64	⇒	1/1+8/1+8/1+8+8+64	⇒	1/9/9/81

Em geral,

$1/n/n^2 \Rightarrow 1/n+1/n+1/1+n+n+n^2 \Rightarrow 1/n+1/n+1/1+2n+n^2 \Rightarrow 1/n+1/n+1/(n+1)^2$, e, portanto, cada linha gera a próxima da seqüência pela aplicação do referido algoritmo.

A existência de um algoritmo que gera todas as linhas divididas da forma $1/n/n^2$ é um resultado extremamente interessante, mas não muda o fato de que a fórmula de Pitágoras e a fórmula de Platão — juntas — não geram todos os ternos pitagóricos, nem todos os ternos pitagóricos primitivos. Não obstante, o algoritmo acima apresentado é obviamente incompleto, pois seria patente para Platão que a soma da média com o extremo maior também nos dará uma nova média. Assim, a linha 1/4/4/16, por exemplo, nos dá não somente 1/5/5/25, conforme a explicação feita acima, mas também

1/4/4/16 ⇒ 16/4+16/4+16/1+4+4+16 ⇒ 16/20/20/25.

Desde que 20^2=16´25=400, 20 é a média geométrica entre 16 e 25 e, portanto, 16/20/20/25 é uma linha dividida do tipo que Platão especifica na ***República***. Quando o extremo menor é 1, o resultado é óbvio, pois

$$1/n/n/n^2 \;\Rightarrow\; n^2/n(n+1)/n(n+1)/(n+1)^2.$$

Mas, 16/20/20/25, por exemplo, também gera duas novas linhas da seguinte maneira:

$$16/20/20/25 \;\Rightarrow 16/16+20/16+20/16+20+20+25 \;\Rightarrow\; 16/36/36/81$$

$$16/20/20/25 \;\Rightarrow 25/20+25/20+25/16+20+20+25 \;\Rightarrow\; 25/45/45/81.$$

É claro que 36^2=16´81 e 45^2=25´81 e, assim, os resultados são linhas divididas legítimas.

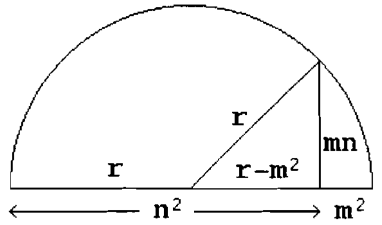
Podemos generalizar este resultado? Sejam m^2 o extremo menor e n^2 o extremo maior; então, pelo Teorema de Platão mn é a média geométrica entre estes extremos e $m^2/mn/mn/n^2$ será uma linha dividida. A soma das suas partes é $m^2+mn+mn+n^2=m^2+2mn+n^2=(m+n)^2$. Assim, o algoritmo nos dá:

$$m^2/mn/mn/n^2 \;\Rightarrow\; {}^2/m^2+mn/m^2+mn/(m+n)^2 \;\Rightarrow\; m^2/m(m+n)/m(m+n)/(m+n)^2$$

$$m^2/mn/mn/n^2 \Rightarrow\; n^2/mn+n^2/mn+n^2/(m+n)^2 \Rightarrow\; n^2/n(m+n)/n(m+n)/(m+n)^2.$$

De novo, o Teorema de Platão nos garante que m(m+n) é a média geométrica de m^2 e $(m+n)^2$, enquanto n(m+n) é a média geométrica de n^2 e $(m+n)^2$ e, portanto, as linhas resultantes são linhas divididas legítimas.

Há ternos pitagóricos associados a estas novas linhas divididas? Considere o diagrama de Pappus referente à linha $m^2/mn/mn/n^2$. Desde que o diâmetro da semicircunferência é n^2+m^2, $c=r=\frac{1}{2}(n^2+m^2)$ e os dois catetos são dados por mn e $r-m^2=\frac{1}{2}(n^2-m^2)$. Ora, se n^2+m^2 é par, *r* será integral; senão, basta multiplicar todos os lados por dois. Assim, como no caso anterior em que o extremo menor era 1, se *r* for par, dois ternos pitagóricos serão gerados, um o dobro do outro; se *r* for ímpar, somente um terno será gerado. Portanto, toda linha dividida $m^2/mn/mn/n^2$ gerará um terno $(2mn,n^2-m^2,n^2+m^2)$.



Será interessante ver alguns exemplos concretos destas linhas e os triângulos gerados. Para tanto, listaremos a seguir os primeiros seis Níveis de linhas e os ternos gerados. Só listaremos ternos em que $c<100$ e manteremos $a<b$, embora 2mn pode ser maior do que n^2-m^2 e, assim, o cateto procedente da média geométrica será escrito em letras itálicas. Para facilitar a comparação, também notaremos o número de cada terno na lista de ternos com $c<100$ que foi dada no início do presente trabalho.

linha dividida	terno para *r* par	terno para *r* ímpar	Nº. na lista de ternos
N1. 1/1/1/1			
N2. 1/2/2/4		(3,*4*,5)	1.1
N3. 1/3/3/9	(*3*,4,5)	(6,8,10)	1.1/2
4/6/6/9		(5,*12*,13)	2.1
N4. 1/4/4/16		(*8*,15,17)	4.1
9/12/12/16		(7,*24*,25)	3.1
4/10/10/25		(*20*,21,29)	10.1
9/15/15/25	(8,*15*,17)	(16,30,34)	4.1/2
N5. 1/5/5/25	(*5*,12,13)	(10,24,26)	2.1/2
16/20/20/25		(9,*40*,41)	5.1
9/21/21/49	(20,*21*,29)	(40,42,58)	10.1/2
16/28/28/49		(33,*56*,65)	12.1
4/14/14/49		(*28*,45,53)	11.1
25/35/35/49	(12,*35*,37)	(24,70,74)	7.1/2
9/24/24/64		(*48*,55,73)	15.1
25/40/40/64		(39,*80*,89)	14.1
N6 1/6/6/36		(*12*,35,37)	7.1
25/30/30/36		(11,*60*,61)	6.1
16/36/36/81		(65,*72*,97)	16.1
25/45/45/81	(28,*45*,53)	c>100	11.1
9/30/30/100		c>100	
49/70/70/100		c>100	
16/44/44/121		c>100	
49/77/77/121	(36,*77*,85)	c>100	13.1
4/18/18/81		(*36*,77,85)	13.1

49/63/63/81	(16,*63*,65)	c>100	9.1
25/60/60/144		c>100	
49/84/84/144		c>100	
9/33/33/121	(*33*,56,65)	c>100	12.1
64/88/88/121		c>100	
25/65/65/169	(*65*,72,97)	c>100	16.1
64/104/104/169		c>100	

Observamos que o único terno que aparece na segunda coluna, mas não na terceira, é (16,63,65). A primeira linha dividida de Nível 8, porém, nos fornece o referido terno, pois

1/8/8/64 ⇒ (2´8,64-1,64+1) = (16,63,65).

É também notável que o único terno primitivo com c<100 que não aparece na terceira coluna é N°. 8.1: (13,84,85). Mas, esta falha é somente aparente porque a segunda linha de Nível 8 gera o referido terno da seguinte forma:

36/42/42/49 ⇒ (49-36,2´42,49+36) = (13,84,85).

Observamos ainda que cada terno da terceira coluna é ou um terno primitivo ou o duplo de um terno primitivo. Finalmente, comparando a fórmula de Platão,

$$(2n,n^2-1,n^2+1),$$

com o algoritmo que gera a terceira coluna,

$$(2mn,n^2-m^2,n^2+m^2),$$

vemos que o novo algoritmo é uma generalização da fórmula de Platão e, de fato, se reduz à fórmula de Platão quando deixamos m=1. Assim, denominamos o novo algoritmo de “fórmula generalizada de Platão”, ou “FGP”.

As observações feitas no parágrafo anterior nos leva às seguintes indagações:

1. Há um terno dado por um diagrama de Pappus que não é gerado por FGP?
2. FGP gera todos os ternos pitagóricos?
3. FGP gera todos os ternos pitagóricos primitivos?

A nossa investigação empírica até agora indica que as primeiras duas perguntas sejam respondidas negativamente, enquanto a última seja respondida afirmativamente. De fato, é fácil ver que FGP não gera todos os ternos pitagóricos pois 15 não pode ser escrito como m^2+n^2 com m,nÎN e, portanto, o terno (9,16,15) não é gerado por FGP. Que FGP gera todos os ternos pitagóricos primitivos é o teor parcial de um teorema clássico da Teoria dos Números; mas, o teorema todo é também facilmente percebido a partir da nossa evidência empírica, pois basta observar que FGP dá ternos primitivos para linhas ímpares com *m* e *n* sendo primos entre si. Desde que todos os ternos primitivos são gerados por FGP, é evidente que não há ternos dados por um diagrama de Pappus que não são gerados por FGP.

Assim, parece muito provável que Platão possuia um algoritmo sistemático para gerar todos os ternos pitagóricos, pois uma vez que ele pudesse gerar os ternos primitivos, os demais seriam apenas múltiplos destes. Como vimos acima, bastaria que Platão tivesse notado que o triângulo dado no diagrama de Pappus para linhas divididas pares é gerado pela fórmula de Pitágoras. Este triângulo, portanto, teria um papel fundamental na descoberta de Platão; não obstante, na sua investigação do que acontece com linhas divididas ímpares ele perceberia que, em termos do algoritmo, não era este triângulo que era importante, mas o seu dobro. O resto sai quase de imediato do algoritmo que gera as linhas divididas a partir de 1/1/1/1. O resultado é até mais elegante do que a terceira fórmula mencionada no início deste trabalho, dada em EUCLIDES (1956) — Lema 1 à Proposição X.29.

Referências Bibliográficas

1. Boyer, Carl B., *História da Matemática* (tradução de Elza F. Gomide), Edgard Blücher, São Paulo: 1974.
2. Erickson, Glenn W. e John A. Fossa, *A Pirâmide Platônica*, Editora da UFPb, João Pessoa: 1996.
3. Euclides, *The Elements* (tradução e comentário por Thomas L. Heath), Dover, New York: 1956.
4. Heath, Thomas L, *A History of Greek Mathematics*, Dover, New York: 1981.