[redacted] Princípios - Deptº. Filosofia UFRN, RN, Vol. II - Nº 1
Junho de 1995

JUL./DEZ. 1995

ASPECTOS DA LÓGICA RELEVANTE NUMA PROVA POR REDUÇÃO AO ABSURDO[1]

ÂNGELA MARIA PAIVA CRUZ*
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA DA UFRN

RESUMO

Neste trabalho analisam-se as fórmulas geradoras de paradoxos presentes na Prova por Redução ao Absurdo. A definição clássica do condicional (→) não traduz satisfatoriamente a noção de implicação. Tal fato dá origem aos paradoxos da implicação material, cujas conseqüências podem ser analisadas em todos os contextos que dele se utilizam. Em particular, a prova por redução ao absurdo utiliza-se de algumas fórmulas geradoras de paradoxos. Coloca-se a Lógica Relevante (que teve origem nos trabalhos de ACKERMANN (1956)) como uma forma de superação de tais paradoxos, uma vez que esta lógica constitui-se numa teoria da implicação e como tal procura estabelecer as condições necessárias e suficientes para se afirmar que "um enunciado A implica um enunciado B". Por fim, considerando-se que os matemáticos, sempre que necessário, usam o referido tipo de prova, aponta-se a necessidade da construção de uma matemática relevante.

1. A DEFINIÇÃO CLÁSSICA DO CONDICIONAL E OS PARADOXOS DA IMPLICAÇÃO MATERIAL

Toda estrutura das provas matemáticas se fundamenta na Lógica Clássica e dentre os conectivos desta lógica (ou seja, dentre a

* Membro da base de pesquisa em Lógica e Epistemologia. Especialista em Lógica.

[1] Comunicaçãoapresentada na VI Semana de Matemática da UFRN, realizada em setembro de 1994.

negação, a conjunção, a disjunção, o condicional e o bicondicional) o condicional (→) é o mais importante. Este conectivo é expresso por "se ... então ... ", e lido muitas vezes como "implica".

Define-se o condicional da seguinte forma:

Sejam A e B enunciados simples. O condicional de A e B é um enunciado falso quando o valor lógico de A é verdadeiro e o valor lógico de B é falso e é um enunciado verdadeiro nos demais casos. Representa-se o condicional de A e B por A → B, onde A é o antecedente e B é o conseqüente (MENDELSON, 1987:11).

Esta definição diz que:

1. sempre que o conseqüente é verdadeiro, o condicional é verdadeiro independente do valor lógico do antecedente;

2. sempre que o antecedente é falso, o condicional é verdadeiro, independente do valor lógico do conseqüente.

Se o condicional é interpretado como **implicação** (ou imposição) a definição acima tem as seguintes conseqüências:

a) o verdadeiro implica o verdadeiro
b) o verdadeiro não implica o falso
c) o falso implica o verdadeiro
d) o falso implica o falso.

Em forma de tabela de verdade isto significa:

A	→	B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

Prova-se através de tabelas de verdade que as fórmulas:

1) A → (B → A)

2) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\sim A \vee B)$
3) $(A \wedge \sim A) \rightarrow B$

são válidas, isto é, são verdadeiras para toda atribuição de valores de verdade e pode-se interpretá-las como segue:

1') A ser verdadeiro implica que qualquer enunciado **B** implica A

2') A implica **B** se, e somente se, A é falso ou **B** é verdadeiro

3') Uma contradição (A $\wedge \sim$A) implica qualquer enunciado **B**.

Esta interpretação não traduz a noção intuitiva de implicação. Tal situação caracteriza o que os lógicos chamam de "paradoxos da implicação material" (COPI, 1978:255).

Analisando-se a estrutura lógica da prova por Redução ao Absurdo[2] percebe-se que nela utiliza-se as fórmulas (1) e (2), geradoras dos paradoxos. Discute-se a seguir as conseqüências da utilização destas fórmulas na referida prova.

Diante dos paradoxos tem-se duas considerações possíveis:

1) os paradoxos são inócuos, e assim não há problema algum a ser resolvido;

2) os paradoxos não são inócuos, isto é, existe pelo menos um problema que pode ser apontado: o condicional clássico não traduz satisfatoriamente a noção intuitiva de implicação.

Admitindo a possibilidade (2) pode-se apresentar duas formas de superação dos paradoxos:

2.1) Considerando-se a posição dogmática, que defende a unicidade da lógica efetua-se modificações na definição do con-

[2] A estrutura de uma Prova por Redução ao Absurdo encontra-se no Artigo intitulado "A Prova por Redução ao Absurdo na Lógica Clássica", desta Revista.

dicional ou explicita-se melhor o seu significado sem mudar a lógica;

2.2) Considerando-se a posição dialética, que defende a pluralidade da lógica percebe-se a necessidade de uma lógica desviante[3] que traduza de modo mais adequado a noção de implicação (COSTA, 1980:17).

Adota-se neste trabalho a posição (2.2) e estuda-se a lógica relevante como forma de superar os paradoxos.

2. A LÓGICA RELEVANTE

As lógicas relevantes introduzidas por **ACKERMANN** (1956) e desenvolvidas por **ANDERSON** e **BELNAP** (1975) pretendem constituir-se numa teoria da implicação, ou seja, elas tentam estabelecer as condições necessárias e suficientes para afirmar-se que "um enunciado **A** implica um enunciado **B**" ou "**A** impõe **B**".

Colocam-se aqui as idéias básicas destas lógicas. Quando a expressão "se **A** então **B**" significa que "**B** se infere de **A**", então **A** $\rightarrow$ **B** deve ser verdadeiro somente quando "**A** é relevante para **B**".

Segundo **ANDERSON** e **BELNAP** (1975: 3 - 106) a implicação **A** $\rightarrow$ **B** deve satisfazer duas condições essenciais:

1. Condição de relevância: Se **A** $\rightarrow$ **B** é demonstrável[4] então **A** e **B** têm pelo menos uma variável proposicional em comum.

2. Condição de necessidade: Se A $\rightarrow$ B é verdadeira, então ela o é necessariamente, pois depende de fatores lógico-formais.

[3] Considera-se lógica desviante toda lógica que derroga pelo menos um dos princípios básicos da lógica clássica, ou seja, toda lógica onde não vale o princípio da identidade, ou o princípio do terceiro excluído, ou o princípio da não contradição.

[4] O conceito de **demonstrabilidade** é definido de modo usual, sugere-se ver MENDELSON, p. 28.

Apresenta-se a seguir o sistema de lógica relevante E_a (cujos postulados são aqueles do sistema E de **ANDERSON** e **BELNAP**, p. 231, retirando-se o E7) que constitui-se dos seguintes ítens:

LINGUAGEM:

Conectivos lógicos: $\sim$ (negação), $\wedge$ (conjunção), $\vee$(disjunção), $\to$ (condicional)

Símbolos auxiliares: (,)

Conjunto infinito enumerável de variáveis proposicionais.

A noção de **fórmula** é definida de modo usual.

POSTULADOS (axiomas e regras de inferência):

P1. $((A \to A) \to B) \to B$

P2. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

P3. $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$

P4. $A \wedge B \to A$

P5. $A \wedge B \to B$

P6. $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to (B \wedge C))$

P7. $A \to A \vee B$

P8. $B \to A \vee B$

P9. $(A \to C) \wedge (B \to C) \to ((A \vee B) \to C)$

P10. $A \wedge (B \wedge C) \to (A \wedge B) \vee C$

P11. $(A \to {\sim}A) \to {\sim}A$

P12. $(A \to {\sim}B) \to (B \to {\sim}A)$

P13. $\sim\sim A \rightarrow A$

P14. $A, \; A \rightarrow B \;/\; B$ (Regra de Modus Ponens)

P15. $A, \; B \;/\; A \wedge B$ (Regra da Conjunção)

As noções de prova e teorema são definidas de modo usual.

3. CONCLUSÃO

Neste sistema não valem as fórmulas 1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$, 2) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\sim A \vee B)$, 3) $(A \wedge \sim A) \rightarrow B$, entre outras, que são geradoras de paradoxos. Assim elas não podem ser utilizadas nas provas por redução ao absurdo de fórmulas da linguagem do sistema E_a

Portanto, as provas por Redução ao Absurdo estão de certo modo "destruídas". O que pode significar a inexistência desta técnica de prova na matemática relevante.

A reconstrução das provas matemáticas com base na lógica relevante não é tarefa fácil, no entanto, tal reconstrução extrapola o âmbito desta discussão.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ACKERMANN, W. *Begründung einer strenger implikation.* The Journal of Symbolic Logic, v.21, 1956, 113 - 128.

2. ANDERSON, A.R., BELNAP, N.D. *Entailment, the logic of relevance and necessity.* Princeton: Princeton University Press, v. 1., 1976.

3. COPI, Irving M. *Introdução à lógica.* São Paulo: Mestre Jou, 1978.

4. COSTA, N.C.A. da. *Ensaio sobre os fundamentos da lógica.* São Paulo: HUCITEC USP, 1980.

5. MENDELSON, Elliot. *Introduction to mathematical logic.* 3 ed, Califórnia: Wadsworth, 1987.