Revista Princípios - Deptº. Filosofia UFRN, RN, Vol. II - Nº I
Junho de 1995

A PROVA POR REDUÇÃO AO ABSURDO NA LÓGICA CLÁSSICA

MARIA DA PAZ NUNES DE MEDEIROS*
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA DA UFRN

RESUMO:

Embora a lógica seja, de um modo geral, concebida como um ramo da filosofia, suas aplicações vão muito além dos limites de qualquer disciplina isoladamente considerada (SALMON, 1993). Seu papel principal é fornecer meios para determinar a relação de conseqüência que vige entre as premissas e a conclusão de um dado argumento. Dentre as técnicas utilizadas que possibilitam garantir esta relação destaca-se a técnica por *redução ao absurdo* por ser amplamente aplicada nas ciências desde a antigüidade. Sua idéia básica reside no fato de que uma proposição não pode ser verdadeira se dela deduzimos uma contradição. Pretende-se, então, apresentar a estrutura lógica de tal técnica de demonstração a partir de um dado sistema formal da lógica clássica.

INTRODUÇÃO

Apresenta-se a estrutura da prova por redução ao absurdo a partir da *Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel* que se configura como um sistema da lógica clássica. Assim, coloca-se inicialmente a linguagem na qual ela será baseada, seus postulados, bem como proposições que são deduzíveis nesta teoria, para em seguida, apresentar o esquema de tal técnica de demonstra-

* Membro da base de pesquisa em Lógica e Epistemologia.
Especialista em Lógica

ção. Na última parte, escolhe-se uma proposição da teoria formal em questão e apresenta-se a sua demonstração utilizando a técnica por redução ao absurdo seguindo, passo a passo, o esquema anteriormente indicado.

1- SISTEMA FORMAL (TEORIA DOS CONJUNTOS DE ZERMELO FRAENKEL)

1.1 - Linguagem (L_{ZF})

Vocabulário:

a) um conjunto enumerável de variáveis: x, y, z, . . .

b) conectivos lógicos: $\sim, \rightarrow, \wedge, \vee, \forall, \exists$

d) símbolos relacionais: $=$ e $\in$

Expressões bem formadas (fórmulas)

a) se x e y são variáveis, então $x \in y$ e $x = y$ são fórmulas;

b) se A e B são fórmulas e x uma variável, então $\sim A$, $(A \rightarrow B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $\forall xA$ e $\exists xA$;

c) uma seqüência finita de símbolos de LzF é uma fórmula se, e somente se puder ser determinada a partir dos itens (a) e (b).

Símbolo definido

$x \notin y =: \sim(x \in y)$

1.2 - Postulados

Sejam A e B fórmulas quaisquer

Axiomas[1]

Ax1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Ax2) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

[1] Estamos apresentando apenas alguns dos axiomas da Teoria de Conjuntos Zermelo-Fraenkel. Sabidamente, somente aqueles que serão necessários para o desenvolvimento do problema em questão. Quanto aos demais axiomas veja (MIRAGLIA, 1990).

Ax.3) $(\sim B \rightarrow \sim A) \rightarrow ((\sim B \rightarrow A) \rightarrow B)$

Ax4) Axioma do vazio: existe um conjunto, denotado por, ϕ, que não tem elementos, isto é, satisfaz a propriedade $\forall z\,(z \notin \phi)$.

Regras de inferência

MP (Modus Ponens): B segue de A e $(A \rightarrow B)$

RN (Regra de Negação): A segue de $\sim\sim A$

IU (Instanciação Universal): A segue de $\forall x A$

IE (Instanciação Existencial): A(y) segue de $\exists x A(x)$, se y é uma variável nova

RC (Regra da Conjunção): $(A \wedge B)$ segue de A e B

RS (Regra da Separação): A segue de $(A \wedge B)$

1.3 - Definições

Se A é uma fórmula, então uma **prova** de A é uma sequência finita de fórmulas, onde A é a última fórmula e cada uma das demais ou é um axioma, ou é conseqüência das anteriores através das regras de inferência.

Uma fórmula A é um **teorema** se existir uma prova de A (A)

Se Γ é um conjunto de fórmulas e A uma fórmula, então uma **dedução** de A a partir de Γ é uma seqüência finita de fórmulas, onde A é a última fórmula e cada uma das demais ou pertence a Γ ou é um axioma, ou é conseqüência das anteriores através das regras de inferência. (Γ A).

Uma **contradição** é uma fórmula que tem a forma: $(A \wedge \sim A)$

1.4 - Resultados Auxiliares (R.AUX)

1) $\sim(A \wedge \sim A)$

2) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\sim A \vee B)$

3) $\sim \forall x(A \rightarrow B) \quad \exists x\,(A \wedge \sim B)$

4) $(A \vee B), \sim B \quad A$

5) Teorema da Dedução (TD): se Γ, A B, então Γ A $\rightarrow$ B, onde A é uma fórmula fechada.

2 - ESQUEMA DE UMA PROVA POR REDUÇÃO AO ABSURDO

A técnica de demonstração por redução ao absurdo baseia-se no princípio de que um argumento é válido se e somente se a conjunção das premissas com a negação da conclusão é uma expressão contraditória, entendendo uma contradição como sendo uma expressão que afirma e nega algo ao mesmo tempo. Com base neste princípio, explicita-se por que, em uma prova por redução ao absurdo, no momento em que se se depara com uma contradição pode-se imediatamente inferir que o enunciado em questão está provado. Assim, se se deseja mostrar que a fórmula $(A \rightarrow C)$ é um teorema usando a técnica por redução ao absurdo, onde A, B e C são fórmulas quaisquer e k a fórmula $(B \wedge \sim B)$, a estrutura dessa prova pode ser esquematizada da seguinte forma:

<u>Esquema da prova</u>

1) A	hipótese
2) $\sim C$	hipótese auxiliar
:	:
:	:
i) K	1 - (i-1), regras de inferência ou axiomas
i+1) $A, C\ \ K$	1 - i, dedução
i+2) $A \sim C \rightarrow K$	i+1, TD
i+3) $A \sim\sim C \vee K$	i+2, R.Aux. (2), MP
i+4) $A\ \sim K$	R.Aux. (1)
i+5) $A\ \sim\sim C$	i+3,i+4, R.Aux. (4)
i+6) $A\ \ C$	i+5, RN
i+7) $A \rightarrow C$	1 - (i+6), TD

3 - UMA APLICAÇÃO DA PROVA POR REDUÇÃO AO ABSURDO

Usando a *técnica por redução ao absurdo* e seguindo passo a passo o esquema anteriormente apresentado, considera-se agora uma proposição da teoria dos conjuntos e mostra-se que ela é um teorema. Mais precisamente, será mostrado que a proposição "se é um conjunto vazio, então está contido em qualquer conjunto " é um teorema da Teoria dos Conjuntos de Zaermelo-Fraenkel. A fórmula correspondente nesta teoria é:

$$\forall x (x \notin \Phi) \rightarrow \forall x(x \in \Phi \rightarrow x \in \Delta)$$

Prova por redução ao absurdo

1) $\forall x (x \notin \Phi)$	hipótese
2) $\sim \forall x(x \in \Phi \rightarrow x \in \Delta)$	hipótese auxiliar
3) $\exists x (x \in \Phi \wedge x \notin \Delta)$	2, R Aux (3)
4) $x \in \Phi \wedge x \notin \Delta$	2, IE
5) $x \in \Phi$	4, RS
6) $x \notin \Phi$	1, IU
7) $x \in \Phi \wedge x \notin \Phi$	5,6, RC
8) $\forall x (x \notin \Phi), \forall x(x \in \Phi \rightarrow x \in \Delta)\ ?\ x \in \Phi \wedge x \notin \Phi$	1 - 7, dedução
9) $\forall x (x \notin \Phi) \vdash \sim \forall x(x \in \Phi \rightarrow x \in \Delta) \rightarrow (x \in \Phi \wedge x \notin \Phi)$	8, TD
10) $\forall x (x \notin \Phi) \vdash \sim\sim \forall x (x \in \Phi \rightarrow x \in \Delta) \vee (x \in \Phi \wedge x \notin \Phi)$	9, R Aux. (2), MP
11) $\forall x (x \notin \Phi) \vdash \sim\sim (x \in \Phi \wedge x \notin \Phi)$	R Aux (1)
12) $\forall x (x \notin \Phi) \vdash \sim\sim \forall x (x \in \Phi \rightarrow x \in \Delta)$	10,11, R Aux (4)
13) $\forall x (x \notin \Phi) \vdash \forall x (x \in \Phi \rightarrow x \in \Delta)$	12, RN
14) $\vdash \forall x (x \notin \Phi) \rightarrow \forall x(x \in \Phi \rightarrow x \in \Delta)$	13, TD

BIBLIOGRAFIA

1. FOSSA, John A. *Técnica de Demonstração em Matemática.* Natal: Clima, 1990.
2. LOPARIC, Zeljko e LOPARIC, Andrea. *Metodologia da Ciência.* João Pessoa: UFPB, 1971.
3. MENDELSON, Elliot. *Introduction to Mathematical Logic.* 3ª ed., California: Wadsworth, 1987.
4. MIRAGLIA, Francisco. *Teoria dos conjuntos: um mínimo.* São Paulo: USP, 1990
5. SALMON, Wesley C. *Lógica.* 3ª ed. Rio de Janeiro: Pentice-Hall do Brasil, 1993.

Endereço da autora:
M.PAZ@ncc.ufrn.br