RESENHAS

SILVA, Jairo José da. *Filosofias da matemática*. São Paulo: Editora UNESP, 2007.

Marcos Silva[*][1]

O livro do professor de matemática e filosofia, Jairo da Silva, publicado em 2007 pela editora UNESP, vem expor (e defender) a perenidade dos problemas filosóficos concernentes à multifacetada matemática ao longo da história do pensamento. A aprioricidade, a universalidade, a necessidade, a indispensabilidade, a aplicabilidade irrestrita, qualidades filosoficamente convidativas da matemática, são analisadas nesta obra pioneira em português. O livro é publicado em bom momento para suprir esta lacuna editorial e para marcar os esforços de consolidação da pesquisa em filosofia da matemática e da lógica matemática no Brasil. Esta pesquisa é representada em boa medida, como Jairo da Silva destaca, pelos Encontros Brasileiros de Lógica e pelos Colóquios Conesul de Filosofia das Ciências Formais, anuais, em Santa Maria, RS.

Com prosa clara e agradável o livro do professor Jairo cumpre o papel que pretende em seu prefácio: o de ser "útil àquele estudante, não importa sua origem intelectual, que queira se iniciar na Filosofia da Matemática, mas que talvez não tenha estudado nenhuma filosofia antes e de matemática só conheça o elementar (sem, no entanto, alienar os já iniciados tanto num domínio quanto no outro)" (p. 23). Seguindo esta proposta sua obra tem fôlego e qualidade suficientes para conquistar um

[*] Doutorando pela PUC-Rio. *E-mail*: marcossilvarj@hotmail.com Resenha recebida em 07.10.2009, aprovada em 02.03.2010.

[1] Agradeço aos professores Luiz Carlos Pereira e Oswaldo Chateaubriand tanto pela indicação deste livro quanto pelo incentivo para esta resenha.

público amplo. Pode, então, ser lida por neófitos procurando panoramas conceituais e históricos acurados ou ser adotada por professores procurando textos-base para suas aulas de graduação e pós-graduação. Pode ser lida sem prejuízos tanto por estudantes de matemática interessados nos fundamentos e problemas teóricos de sua disciplina quanto por estudantes de filosofia interessados pelo terreno preciso e bem comportado da matemática, onde todos os temas tradicionais da filosofia reaparecem, seminais.

De Platão aos contemporâneos, de ontologia à epistemologia, de realismos ingênuos a idealismos radicais, de perspectivas intensionais a elogios à extensionalidade, de proponentes a detratores da metafísica, são todos temas e tensões revisitados de maneira profícua pelo livro. Aliás, aqui temos um ponto de fascínio que estimula o interesse pelo pensamento em geral e pela filosofia da matemática em particular: todas as grandes questões e debates filosóficos encontram acolhida e resurgem, caprichosamente, repaginados, mesmo em um domínio marcado pela exatidão, formalismos e objetividade. É interessante e revelador poder discutir filosofia em terreno que deveria sempre, por princípio, primar pela clareza e certezas.

Apesar de introdutório o “Filosofias da Matemática” apresenta e defende uma tese de seu prólogo ao epílogo, iniciando e perfazendo cada capítulo, a saber, a necessidade de se tomar a matemática e sua filosofia em diacronia. Com efeito, Jairo da Silva defende a importância da historicidade da matemática no estudo de sua filosofia, ponderando suas crises, fracassos, retomadas e evoluções. A matemática, segundo o autor, reflete a cultura onde é criada, sendo inútil, então, procurar uma essência que poderia ser revelada pela filosofia ou qualquer investigação mais sistemática de seus amplos domínios. Coerente com esta proposta, para cada autor ou corrente filosófica apresentada, há em seu livro uma introdução histórica onde se mostra, em panorama, o nível de evolução das técnicas e procedimentos matemáticos e os debates teóricos e técnicos contemporâneos a eles. A partir de uma chave de perguntas bem determinada o autor apresenta e analisa a atividade filosófica que perscruta a matemática em suas teorias. De fato, perguntas sobre o que são os objetos matemáticos (ontologia matemática), como conhecê-los (epistemologia matemática) e por que podem ser aplicados de maneira sistemática à realidade empírica, uma vez que sejam independentes dela, são (e devem ser) itens permanentes em qualquer pauta de discussão sobre a filosofia da matemática.

Além disso, outra questão que se impõe a qualquer teórico, como bem mostra o livro do professor Jairo, é determinar em que medida caberia à filosofia regular a atividade do matemático, apontando o que é legítimo ou ilegítimo em suas práticas, revisando e legislando sobre o que é feito. Sob esta visão, o filósofo poderia decidir, em princípio, sobre a validade das regras de um terreno específico extra-filosófico. Em oposição a esta perspectiva mais crítica e restritiva, o filósofo da matemática poderia adotar posturas mais descritivas das atividades, destacando que a prática dos matemáticos sob esta visão é o teste genuíno para boas teorias filosóficas. Desta forma, esta proposta se coaduna à tese tradicional que defende a matemática como padrão de verdade e dotada de papel privilegiado no esquema geral da razão humana. Como fica evidente na obra de Jairo da Silva, esta pequena contenda já mostra o potencial problematizador da filosofia em sua excelência, porque além do próprio domínio estudado, o proceder filosófico é posto em questão também, e se argue sobre sua própria legitimidade e alcances. Apesar da filosofia com freqüência se extrapolar, ela mesma é tomada em dúvida e análise.

Outra tese defendida pelo autor é a respeito da origem dos maus entendidos freqüentes ao se esperar da filosofia da matemática um comportamento de ciência, ou seja, esperar que o filósofo seja cientista e se comprometa com a existência de uma teoria verdadeira. Esta confusão fica particularmente clara quando entendemos que a própria noção de teoria e verdade estão *sob judice* na filosofia. Jairo da Silva destaca, e este é certamente um ponto notável de seu livro, que filosofia não precisa veicular uma teoria verdadeira sobre domínios de observação, mas "teorias interessantes". Esta característica, de ser interessante, desempenha papel importante na concepção de filosofia do autor. A partir da inevitável constatação que muitas teorias filosóficas apesar de consistentes são incompatíveis entre si, sem que uma delas seja ou possa ser descoberta como a verdadeira teoria, o autor observa que "se à ciência empírica cabe explicar e prever, sujeita sempre ao crivo da experiência, à filosofia cabe fornecer-nos conceitos e ideias, sistemas, teorias ou perspectivas, sujeitas sempre ao confronto com suas rivais, cuja função é antes descortinar questões interessantes, interpretações iluminadoras (ainda que não a rigor "verdadeiras"), *insight* ou caminhos promissores." (p. 235)

Daí o título do livro, onde filosofia aparece propositadamente no plural. As correntes filosóficas mesmo sendo excludentes entre si podem, então, descortinar ou revelar um aspecto pertinente e seminal sobre a natureza da matemática. Este é certamente o ganho do livro de Jairo, a generosidade de visão, importante em um livro introdutório para não coibir o horizonte do leitor iniciante. Fica claro que cada perspectiva apresentada e defendida pelos filósofos pode contribuir de seu modo para evidenciar uma parte da matemática. Mesmo erros em teorias podem gerar bons subprodutos por serem, sobretudo, esforços que evidenciam determinadas características centrais de um domínio. Cada perspectiva ou programa filosófico pode iluminar um recanto particular de um domínio amplo e multifacetado, destacando que às vezes "buscar soluções é mais fértil que obtê-las" (p. 110). Assim o autor vem defender, de encontro às teses de Wittgenstein ecoadas pelo positivismo lógico, a dignidade e existência dos problemas filosóficos, sempre inevitáveis, inextinguíveis, irrefreáveis: "A matemática é fonte constante de questionamentos que transbordam os seus limites e requerem um contexto propriamente filosófico para serem adequadamente tratados. A filosofia da matemática é o departamento do imenso edifício da filosofia que tem por competência acolhê-los."

No prólogo de seu livro, mais especificamente nesta crítica de caráter mais geral, é o único lugar em que o autor menciona a filosofia de Wittgenstein. Esta é uma omissão, a meu ver, sentida e não justificada em pelo menos três lugares de seu livro, onde a filosofia de Wittgenstein, mesmo com suas rupturas e teses extravagantes, poderia contribuir na composição dos panoramas conceituais e claras influências históricas. Destaco-as: (i) ao discutir a importância da noção de uso em Dummett e fazer um elogio ao construtivismo lingüístico (p. 177); (ii) ao discutir e elogiar teses carnapianas sobre a composição lingüística do conteúdo matemático (p. 229), em ambos os pontos faltou algum tratamento, mesmo que incidental, da noção de regras e seu papel central nas visões pragmáticas de manipulação de símbolos. E (iii) num ponto em que quase parafraseia, acredito que inadvertidamente, a famosa teoria da representação (*Bildtheorie*) do *Tractatus* de Wittgenstein: "Mas essas associações [de seqüência e operações de barras a outras seqüências e operações de outros objetos] não são arbitrárias. | | só pode ser associado a {a,b}, porque existe uma relação de correspondência um-a-um entre as barras da seqüência quanto à coleção. Assim, deve existir algo que tanto a seqüência quanto a coleção que corresponde a ela tem em comum. É apenas em virtude dessa identidade formal que a teoria das seqüências de barras pode ser aplicada." Com efeito, Wittgenstein, em seu *Tractatus,* defende uma concepção metafísica de simbolismo que demanda uma relação biunívoca preservativa entre representação e representado que evidenciaria uma forma lógica comum entre seus elementos componentes (*cf. Tractatus* 2.18).

Além disso, aqui não é um caso de falta, mas, talvez, de excesso, a fenomenologia de Husserl aparece com certa insistência em muitos momentos na obra do professor Jairo e em alguns pontos, de maneira surpreendente, porque pouco usual na literatura, por exemplo: no apêndice à teoria da abstração aristotélica, numa analogia ao logicismo de Frege, na menção ao formalismo do grupo Bourbaky e na recomposição do programa de Hilbert pós-teoremas de Gödel. Em quase todos os pontos em que Husserl é mencionado, Jairo da Silva o defende como autor que influenciou diretamente teses defendidas ao longo do século XX, mas que nunca foi referenciado devidamente pela literatura especializada. Esta insistência em Husserl mostra que o livro de Jairo não é inteiramente isento, apesar de introdutório, e seu panorama tende a privilegiar elementos fenomenológicos e epistemológicos da matemática. A par disso, este elogio tácito à fenomenologia contrasta com um tom jocoso e desencaminhador em tratar outras teorias da ordem do dia, com acentos mais ontológicos que epistêmicos, como o platonismo. Refere-se a estas teorias tradicionalíssimas como "teorias de lugar nenhum", de "lugares celestes" ou "puramente utópicos" (*cf.* p. 178). O platonismo é conhecido, por dentre outras qualidades: explicar a visão ingênua do matemático, não restringindo sua atividade; ter como base a intuitiva verdade por correspondência; aceitar procedimentos usuais como provas indiretas; apresentar certo otimismo epistemológico, por acreditar que as verdades da matemática já estão todas determinadas independentes da atividade humana. Apesar de ser difícil identificar o *locus* dos objetos matemáticos e de determinar o tipo de acesso epistêmico a estes objetos, o platonismo é uma saída interessante para os problemas matemáticos. Aliás, estas perguntas, como feitas pelo professor Jairo, sobre que lugar ocupariam estes objetos matemáticos independentes, parecem excessivamente contaminadas por imagens e intuições espaciais, exigindo justamente de objetos abstratos o que não podem dar. Ora, se forem entes abstratos, não são físicos, logo não faz sentido perguntar onde estariam como perguntamos sobre objetos materiais. Além disso, a insistência no problema do tipo de acesso que teríamos a estes objetos mostra uma intrusão epistemológica, que tem como marco questões kantianas, num terreno propriamente ontológico.

Portanto, há claramente certo desequilíbrio no panorama do livro, tanto em conteúdo no caso da filosofia de Wittgenstein como em tom evidenciado pelo tratamento diferenciado e elogioso à fenomenologia, mesmo que não explícito, e indevido quanto ao platonismo matemático. A omissão de Wittgenstein, por exemplo, mereceria ao menos uma nota que a justificasse. Entretanto este fato certamente não compromete o brilhantismo da sua obra quanto à erudição e domínio do autor em relação à matemática, à filosofia e à articulação seminalíssima entre as duas.

* * *

O livro é dividido em 5 grandes capítulos sendo os dois primeiros, um sobre Platão e Aristóteles e outro sobre Leibniz e Kant, de caráter mais histórico e introdutório às questões em filosofia da matemática do fim do século XIX e do século XX. Este período é consensualmente tomado como filosoficamente mais maduro e com avanços mais bem consolidados em técnicas e teorias matemáticas. Este período é representado pelos capítulos sobre Frege e o Logicismo, outro sobre os vários tipos de construtivismo e um último sobre o formalismo e o programa de Hilbert. Os capítulos comportam seções, subtópicos e apêndices ricos de perspectivas que não são _ infelizmente _ discriminados no Sumário. As partes do livro são antecipadas por uma elegante apresentação feita pelo professor Chateaubriand e por inspirados Prólogo e Introdução escritos por Jairo da Silva. O livro é encerrado com Epílogo que reitera as teses do autor, que apresentei acima, e todas as correntes filosóficas apresentadas ao longo da obra em suas vertentes ontológicas e epistemológicas, destacando, segundo a visão do professor Jairo, o problema da aplicabilidade irrestrita da matemática como o grande problema a ser enfrentado por um filósofo da matemática. Há também um elenco de livros indicados para dar continuidade aos estudos e curiosidades dos leitores.

A partir daqui, pretendo fazer uma breve descrição das partes do livro.

O primeiro capítulo trata da matemática grega para se concentrar nas filosofias matemáticas de Platão e Aristóteles como paradigmas de explicação tanto em matemática como em outras áreas da filosofia. Seus sistemas aparecem, então, como repertórios de ideias que a tradição sempre revisita, remonta e re-elabora. Platão como paradigma de uma interpretação realista da matemática pela assunção de um domínio objetivo independente e só acessível pelo entendimento e Aristóteles como marco de outro tipo de realismo que assume um domínio independente, mas extraído de objetos reais. "O que Platão tomava por objetos matemáticos ideais, Aristóteles via apenas como aspectos (formais), ou idealizações de aspectos de objetos reais" (p. 56). Jairo da Silva destaca que as técnicas mais sistemáticas e rigorosas de cálculos elementares permitiram o pioneirismo abstrato grego pela importância atribuída à racionalidade, pureza e validade universal dos problemas matemáticos desvinculados de interesses práticos. Este ineditismo possibilitou, então, uma clara compleição filosófica em atividades matemáticas, representadas de forma marcante pelo pitagorismo. Sob esta perspectiva, a matemática possibilitaria então o acesso à estrutura íntima do cosmos pela constituição essencialmente numérica das coisas. Jairo da Silva também sublinha a importância do método dedutivo de Euclides na redução racional de todas as verdades geométricas aos axiomas de seus *Elementos*. Os gregos ainda viram nascer a lógica formal sistematizada por Aristóteles, a partir de um elenco exaustivo das formas válidas de inferência. Este sistema foi refinado no XIX pelo uso inovador de linguagens simbólicas mais sofisticadas que aumentaram o poder de expressão e investigação das inferências válidas. Apesar de problemas com teses empiristas, como a impossibilidade de enumerar coleções abstratas e imaginárias e números transfinitos e a dificuldade recorrente de se explicar a (aparência de) necessidade e universalidade, Jairo da Silva esboça no apêndice a este primeiro capítulo uma abordagem empirista da abstração, segundo ele, "uma asserção matemática poderia ser vista como a generalização de uma asserção empírica, não baseada na mera indução enumerativa, mas em uma intuição formal". Logo, a matemática poderia ser justificada por evidência empírica mais um procedimento de abstração na intuição formal[2].

O segundo capítulo trata da filosofia da matemática de Leibniz e Kant e é introduzido por uma descrição do estado da matemática no século XVII e XVIII, onde aparecem uma crescente autonomia do simbolismo com sistemas mais flexíveis e expressivos com incógnitas, parâmetros e operações mais bem determinados. A partir de uma maior força heurística advinda do simbolismo moderno, as vantagens das técnicas matemáticas puderam ser estendidas e generalizadas No campo da filosofia moderna, Descartes operou o deslocamento do foco da ontologia para a epistemologia e logrou a filosofia como crítica do conhecimento. A ciência moderna foi, enfim, marcada pela matematização da natureza concebida por Galileu. Já a matemática da modernidade é marcada pelos métodos infinitários. Todos estes avanços e rupturas mostravam o distanciamento de elementos intuitivos e empíricos em ciência e em teorias especulativas. Em oposição à concepção grega, a modernidade mostrou que os números não precisavam mais ser quantidades, mas poderiam ser abstrações da razão formal. Em razão disso, Jairo da Silva destaca a existência clara de uma tensão entre elementos intuitivos e finitários e elementos abstratos e infinitários, mostrando a conseqüente necessidade da época em não considerar mais a intuição como critério para teorias. "O que é contraditório para as grandezas finitas pode ser da própria essência das grandezas infinitas; o que repugna a nossa intuição finita pode ser a verdade do infinito. A duras penas os matemáticos aprenderam a desconfiar da "intuição", do óbvio, da luz natural, quando essas nada mais são que a mera e indevida extensão de verdades para além de seus limites de validade" (p. 84).

Leibniz destaca o caráter lógico-analítico da matemática com sua clássica divisão entre verdades de fato ou contingentes e verdades de razão, as quais não poderiam ser negadas. Desta forma, a matemática poderia ser assumida como inteiramente conceitual e simbólica. Afirma Jairo da Silva:

---

[2] Indico, aqui, o trabalho de Casanave, Sautter e Secco publicado na revista *O que nos faz pensar* n.24, de 2008, onde este tema da assunção de uma abstração lógica na composição da geometria e da aritmética é retomado. Ali, a prova sugerida por Jairo da Silva é confrontada com a de J.Lear, mostrando-se que a partir da definição deste podemos ter a de Jairo, mas sem a recíproca. Há ainda neste trabalho, uma importante correção ao itinerário da prova proposta pelo professor Jairo.

"apesar de sua idealidade abstrata, a matemática regeria o mundo, ordenando-o e tornando-o inteligível" (p. 192). Já a filosofia de Kant viria para restituir a premência de intuitividade à matemática, mesmo que um intuitividade formal. Ela deveria, então, ser baseada na construção e síntese pela intuição pura do sujeito. Para Kant, na matemática a manipulação simbólica se liga indiretamente à intuição a qual se referem. Portanto, em oposição a Leibniz, a análise conceitual não é suficiente para verificar as asserções da matemática, seria necessário um elemento sintético. Em Kant, só são legítimas construções simbólicas e construções ostensivas. Aqui se denota claramente o confronto entre o que é feito em matemático e o que a filosofia demandaria. A filosofia de Kant não aceita, por exemplo, a possibilidade de números imaginários e a possibilidade de uma geometria não euclidiana. Apesar de dar uma explicação elegante ao fenômeno da matemática congregando-a com um edifício científico marcado pela premência de construtividade a partir de intuições, a filosofia de Kant faz acreditar que a aritmética também se funda sobre a intuição, obscurecendo a percepção de que a correlação entre aritmética e tempo não é tão natural quanto a de espaço e geometria. Jairo da Silva observa bem esta tensão entre filosofia regulativa e a atividade dos matemáticos, se alinhando com esta: "a Filosofia da Matemática de Kant, fortemente limitada pela noção de construção de conceitos, *i.e.*, pela necessidade de exemplificações na intuição pura, foi contaminada pelo seu projeto filosófico mais amplo, uma crítica à Filosofia e à teologia dogmáticas, discursos caracterizados pela argumentação lógica desprovida de intuição. Foi assim também uma crítica à matemática de seu tempo e à matemática futura. Esta é simultaneamente sua virtude e seu defeito." (p. 107).

O terceiro capítulo trata do projeto fundacionista do logicismo. Aproveitando a tensão entre o dogmatismo leibniziano e o criticismo de Kant, Jairo da Silva introduz a filosofia de Frege que defendeu a geometria como sintética, restrita ao espaço, enquanto a aritmética deveria ser reduzida à lógica, à razão, por ser mais geral e abstrata. Como bem sublinha Jairo da Silva: "se formos coerentes quanto ao padrão de contagem e preservarmos o sentido dos termos e operações numéricas, 1+1 só pode ser igual a 2" (p. 124). Operações aritméticas são funções do entendimento e não da sensibilidade, mesmo que pura. A partir desta tese Frege, então, tentou implementar o programa de Leibniz: reduzir os conceitos e verdades da aritmética a equivalentes puramente lógicos (analíticos). Para tanto a lógica deveria ser mais expressiva, sofisticada e precisa. Assim novos patamares de rigor formal na matemática, através de novas expressões, articulações, notações e análises, deveriam ser introduzidos. Isto permitiu o avanço da informática, de ciências cognitivas e da inteligência artificial do século XX. Além do salto qualitativo em lógica pela simbologia de Frege, se destaca também no século XIX o aparecimento de geometrias não euclidianas, de teorias dos conjuntos de Cantor com a noção de infinito atual.

Frege permitiu a expressão mais refinada da forma lógica de sentenças, um calculo potente, uma nova abordagem da análise de asserções, de relações e quantificadores. Mesmo que seu projeto fundacionista não tenha dado certo, porque o sistema de Frege demonstrava leis da matemática, mas contradições também, Jairo da Silva destaca com toda razão que muitas vezes "buscar soluções é mais fértil que obtê-las". Neste capítulo, ainda são apresentadas as tentativas de se recriar o logicismo de Frege no *Principia Mathematica* de Russel e, mais contemporaneamente, no neo-logicismo representado por Crispin Wright. No apêndice a este capítulo, Jairo apresenta uma interessante exposição da definição por abstração matemática onde objetos são definidos por classe de equivalência. É possível, a partir desta técnica, redefinir um conjunto em outro para reduzir a quantidade de entes necessários em uma teoria. Jairo da Silva defende, então, que este método "atentos que somos às críticas e às atitudes de Frege e Russell, é também um instrumento de redução ontológica, permite a eliminação de entidades matemáticas desnecessárias em favor de conjuntos de entidades já existentes" (p. 142).

No começo do quarto capítulo, Jairo mostra como a matemática, a partir da profusão de inovações técnicas havia se tornado formalista demais, o que foi, em parte, a razão que engendrou a proliferação de paradoxos e as suas crises de fundamentos no começo do século XX. Houve, então, a necessidade de ser regulada pela intuição imediata e justificada por construções efetivas. Enquanto Frege pretendia mostrar que a lógica era anterior a matemática, construtivistas inverteram o raciocínio e defenderam que "a lógica é a descrição *a posteriori* das regularidades formais dos procedimentos de construção matemática" (p. 151). A filosofia da matemática ganhou novamente um estatuto revisionista e crítico do conhecimento matemático acentuando restrições e limites de procedimentos e práticas muito familiares ao projeto crítico kantiano. Como Kant, alguns filósofos voltaram a defender que não haveria matemática sem evidência manifesta ou objeto que não pudesse ser construído num procedimento finito, limitada e discreto, sendo a matemática fundada num instante temporal sucedendo outro. Esta é a visão de Brower. "A intuição básica de que qualquer experiência mental tem a forma de uma seqüência temporal finita e suficiente para nos dar (por reflexão) o esquema geral dessa seqüência ela mesma como um objeto intuído" (p. 149).

Assim como Platão teria sido o primeiro platonista, Kant teria sido o primeiro filósofo contrutivista. Assim Brower joga luz novamente na necessidade do sujeito e suas formas de acompanharem os processos matemáticos de forma direta ou potencialmente direta de um matemático ideal. Outros tipos de construtivismos mais fracos que o de Brower são apresentados por Jairo da Silva. Por exemplo, Poincaré ressaltou que a aritmética poderia ser construída na intuição fundamental da sucessão discreta e ininterrupta de pontos e acentuando a necessidade de restrição às definições predicativas. A matemática seria, então, uma vivência consciente de construção finita. Já Dummet defende a existência de uma teoria da significação correta que implica a validade exclusiva da lógica intuicionista na matemática: sem dupla negação, sem provas indiretas. Segundo esta corrente de construtivismo, mesmo que fosse inteligível, se não for verificável não é uma proposição da matemática. Jairo da Silva defende que temos que admitir a possibilidade de um sentido formal para garantirmos a inteligibilidade de proposições matemáticas que não possamos verificar (pp. 162-6). "O sentido formal de uma asserção não depende de conhecermos ou podermos reconhecer as suas condições de verdade, mas apenas do fato de que os termos que a compõem estarem corretamente combinados, ou dito de outra forma, a posse de sentido formal exige apenas que a asserção não contenha nenhum erro categorial." Assim, garante-se a tese que corrobora a nossa intuição usual e assegura o sentido de proposições que não possamos verificar.

Já o quinto e último capitulo trata do formalismo, última grande corrente fundacionista do século XX. Destaca-se a importância cada vez maior do método axiomático-dedutivo a partir do qual toda a fundação de uma ciência poderia ser realizada por meio de uma base de verdades não demonstradas de onde poderíamos extrair, por meios lógicos, todas as demais verdades. As teorias axiomáticas podem ser interpretadas, tendo asserções com significado determinado por um domínio específico de objetos e podem ser não-interpretadas, quando seus termos só veiculam o significado que os axiomas o dão, sendo meras sucessões ou seqüências de símbolos.

Esta técnica permitiu isolar os elementos puramente dedutivos de uma teoria. Segundo Jairo da Silva, "Hilbert liberou o método axiomático de suas limitações, abrindo-lhe os horizontes do puro formalismo. Ele viu que a natureza dos objetos de um domínio descrito por uma teoria axiomática interpretada não desempenhava nenhum papel lógico, vislumbrando assim a possibilidade de abstrair completamente a natureza desses elementos reduzindo domínios matemáticos a sua pura forma lógica, e tradicionais teorias matemáticas a teorias puramente formais" (p. 187). Estava criado a metamatemática, um estudo sobre características de teorias matemáticas formais, como, por exemplo, sua consistência e trivialização, completude, correção e independência de axiomas.

Teorias axiomáticas são úteis para permitir provas relativas de consistência onde um domínio teria sua consistência garantida pela consistência de um outro domínio. Hilbert, em seu projeto fundacionista, procurou uma prova absoluta da consistência da aritmética justificando o infinito pelo finito intuitivo, justificando a matemática pela matemática finitária (um sistema de manipulação de sinais gráficos). Segundo esta visão, a consistência era a marca a ser procurada por uma teoria. Bastaria, então, a matemática finitária, toda verificável e completa, para poder ser estendida sem inconsistências. Deste modo, esta matemática simples deveria provar a sua própria consistência sem auxilio de sistemas externos e ser completa, ou seja, para qualquer asserção "construível" dentro dela, ela ou a sua negação deveria ser demonstrada. Não é difícil notar que os teoremas de Gödel de 1931 solapavam o formalismo de Hilbert. O primeiro mostrava que um sistema axiomático como a aritmética de Peano poderia conter uma sentença a qual nem ela ou a sua negação pudesse ser demonstrada. Já o segundo grande resultado mostrou que é sempre necessário um sistema mais forte para provar a consistência de uma teoria axiomatizada. Em outras palavras, o primeiro mostra que o método axiomático não é completo sobre o ponto de vista teórico e o segundo, a impossibilidade de uma prova absoluta de consistência.

Jairo da Silva destaca também que resultados matemáticos não resolvem divergências filosóficas. Por exemplo, para Brower, a questão problemática não está na consistência de teorias, mas na sua construção. Depois de Gödel, o formalismo de Hilbert ficou condenado à humildade de buscar provas relativas de consistência, uma vez que nenhum sistema consistente pode provar a sua própria consistência. Mais ainda se impõe, como bem vê Jairo da Silva, coerente com sua posição a respeito da irrefreabilidade dos problemas filosóficos, o problema sobre o estatuto dos axiomas da matemática: serão eles enunciados verdadeiros sobre determinado domínio de objetos ou simples regras que fixam as operações legítimas de símbolos?

A partir desta questão, professor Jairo esboça uma agenda de problemas epistemológicos e ontológicos em um programa de Hilbert modificado, como um convite para a pesquisa, mostrando o muito que ainda pode ser feito. A primeira tese-problema defende que a matemática estuda a manipulação regrada de sinais gráficos (operações e relações). A segunda que números são peças no jogo formal da aritmética, não objetos e não verdadeiros. A terceira que matemática é o estudo das conseqüências lógicas ou definições arbitrárias dadas por sistemas de axiomas, desenvolvendo-se em uma teoria de possíveis antes de ter o domínio efetivo de aplicação. A quarta tese assume que a matemática estuda a forma ou estrutura do domínio de objetos existentes ou meramente possíveis, ou seja, a matemática só seria coagida pela consistência do que já foi feito. Todas estas formulações desafiam segundo Jairo da Silva "o mais sério problema inventado pelo conhecimento matemático" (p. 221): como é possível que uma ciência a priori seja relevante para o conhecimento empírico? A matemática é independente, mas aplicável. Existem várias distintas filosofias para resolver estes problemas. Que não precisam ser verdadeiras, mas interessantes. As três correntes apresentadas iluminam múltiplas facetas da matemática. Não são hegemônicas ou definitivas, mas certamente convergem para serem autênticos programas de pesquisa com muito ainda a ser feito. O livro do professor Jairo é seminal em apontar, então, para a direção da perenidade dos problemas da filosofia da matemática em toda a sua dignidade e alcance.