

Uma abordagem baseada em lógica fuzzy para o diagnóstico e planejamento da rede de nivelamento do Sistema Geodésico Brasileiro

A fuzzy logic approach for diagnosing and planning the leveling network of the Brazilian Geodetic System

Salomão Soares¹; Regiane Dalazoana²; Hideo Araki³

¹ Universidade Federal do Paraná, Departamento de Geomática, Curitiba/PR, Brazil. Email: salomao.soares@ufpr.br
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4826-776X>

² Universidade Federal do Paraná, Departamento de Geomática, Curitiba/PR, Brazil. Email: regiane@ufpr.br
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5468-0679>

³ Universidade Federal do Paraná, Departamento de Geomática, Curitiba/PR, Brazil. Email: haraki@ufpr.br
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7116-6102>

Resumo: A rede de nivelamento é um conjunto de marcos geodésicos denominados referências de nível (RRNN), que materializam a componente vertical de um sistema geodésico, sendo essencial para o planejamento e execução de obras de engenharia. Sua manutenção e densificação demandam um planejamento detalhado para empenho adequado de recursos. Nesse sentido, para otimizar o diagnóstico e o planejamento de campanhas geodésicas, auxiliando a tomada de decisão diante de limitações orçamentárias e operacionais, foi proposta uma metodologia baseada em lógica fuzzy, que lida com incertezas e subjetividades do processo decisório. Assim, no desenvolvimento da corrente pesquisa foi aplicada a lógica fuzzy pelo método Mamdani, envolvendo a fuzzificação, inferência e defuzzificação, tendo como resultado a priorização hierárquica de atividades de campo em alta, média e baixa. Como destaque dos resultados, identificou-se que RRNN destruídas somam 9.155 e as não encontradas, 26.322, o que corresponde a 49,6% da rede de nivelamento. Esse diagnóstico pode ser pior, já que das 22.524 RRNN com o status bom no banco de dados geodésicos e classificadas como prioridade alta de verificação da realidade física, 19.388 não são visitadas há mais de 20 anos. A abordagem proporcionou uma visão sistêmica de subsídio ao planejamento e à otimização de recursos, fortalecendo a tomada de decisão estratégica.

Palavras-chave: Lógica fuzzy; Rede de nivelamento; Diagnóstico.

Abstract: The leveling network consists of benchmarks that represent the vertical component of a geodetic system. This network is essential for the planning and execution of engineering projects. Its maintenance and densification require detailed planning to ensure the efficient allocation of resources. In this sense, to optimize the diagnosis and planning of geodetic campaigns, assisting decision-making in the face of budgetary and operational limitations, a methodology based on fuzzy logic was proposed, which deals with uncertainties and subjectivities in the decision-making process. Thus, in the development of this research, fuzzy logic was applied using the Mamdani method, involving fuzzification, inference, and defuzzification, resulting in the hierarchical prioritization of field activities into high, medium, and low categories. Notably, the results identified 9,155 destroyed benchmarks and 26,322 benchmarks classified as not found, amounting to 49.6% of the leveling network. This situation could be more critical, as 19,388 of the 22,524 benchmarks marked as 'good' in the geodetic database and classified as high-priority for physical verification have not been visited in over 20 years. The approach provided a systemic vision to support planning and resource optimization, strengthening strategic decision-making.

Keywords: Fuzzy logic; Leveling network; Diagnosis.

1. Introdução

A rede altimétrica brasileira, denominada Rede Altimétrica de Alta Precisão (RAAP), é a componente vertical do Sistema Geodésico Brasileiro (SGB), responsável pelo transporte de altitudes para todo o território nacional. A RAAP se desenvolveu ao longo da malha viária desde 1945 (ALENCAR, 1968), sendo representada atualmente por 71.475 RRNN, as quais proporcionam uma infraestrutura altimétrica de referência para as mais diversas atividades em que o conhecimento do fluxo d'água é determinante.

Ao longo do seu desenvolvimento, devido à impossibilidade de transportar altitudes com a técnica de nivelamento geométrico para o Estado do Amapá, já que não existem trajetos terrestres disponíveis com a Foz do Rio Amazonas extremamente larga, a rede antes conectada apenas ao Datum Imbituba, passa a contar com o Datum Santana para atender exclusivamente a esse Estado a partir de 1980 (LUZ e GUIMARÃES, 2001).

Na última década, os principais acontecimentos relacionados à densificação da RAAP podem ser organizados em três frentes. Entre 2014 e 2016, ocorreu a revitalização da rede no Estado do Amapá (PORTAL DO ESTADO DO AMAPÁ, 2016). Entre 2017 e 2019, implantou-se uma rede de referência costeira no litoral do Estado do Rio de Janeiro, voltada para pesquisas de integração entre altimetria e batimetria (SOARES; SANTOS; LUZ, 2019). E entre 2018 e 2022, destacou-se a conexão altimétrica da estação GNSS contínua de Marabá, cujo cálculo foi divulgado recentemente (IBGE, 2024).

Como toda rede de nivelamento, a RAAP passou por diversos recálculos em função da incorporação de observações, correção de inconsistências e novas técnicas de observação e cálculo. Porém, o último reajustamento ocorrido em 2018 modernizou-a profundamente, já que a maior disponibilidade de observações gravimétricas em todo território nacional possibilitou o reajustamento com número geopotencial, seguindo as recomendações do Sistema de Referência Geodésico para as Américas (SIRGAS, 2021) em consonância com a Associação Internacional de Geodésia (IAG, *International Association of Geodesy*) rumo à adoção do futuro Sistema Internacional de Referência de Altitudes (IHRs, *International Height Reference System*) e sua respectiva Rede Internacional de Referência de Altitudes (IHRF, *International Height Reference Frame*) (IBGE, 2019). Destaca-se também que, a partir desse reajustamento, as altitudes categorizadas como “normais-ortométricas” passam a ser altitudes do tipo normal, tendo como modelo de conversão de altitudes o *hgeoHNOR2020* (IBGE, 2023).

A manutenção e ampliação da RAAP envolvem atividades complexas que demandam muitos recursos humanos e financeiros e com baixa escala de produção. Infelizmente, técnicas bem-sucedidas em outros países, como o nivelamento motorizado (POETZSCHKE, 1980; VESTØL et al., 2014; IGN, 2019), não foram empregadas na ampliação da RAAP até o momento.

Olhando o cenário mundial, percebe-se que a demanda pela componente vertical continua elevada e primordial em pesquisas de movimentos crustais, aferição de modelos geoidais e implantação de infraestrutura, como portos, rodovias e redes de água e esgoto, entre outros. Exemplos incluem a pesquisa de Chao, Overton e Nelson (2006) sobre o controle de solos expansivos; a implantação de uma linha de 360 km no Colorado (EUA) em 2017, com o intuito de qualificar a precisão de vários modelos geoidais (VAN WESTRUM et al., 2021; WANG et al., 2021); e o projeto de implantação de uma rede de nivelamento na França, concebido em 2008, com duração prevista de 12 anos, abrangendo o país em linhas latitudinais e longitudinais. Essa iniciativa, além de conectar marêgrafos, representa um esqueleto de sustentação da rede altimétrica francesa (IGN, 2019). Em contraponto, tem-se o caso canadense, que abandonou sua rede de nivelamento e a substituiu exclusivamente por um modelo gravimétrico (SANTOS, 2015).

Retornando ao Brasil, a RAAP, como toda rede materializada no terreno, sofre constantemente com furtos de chapas agregados ao vandalismo impune. Apesar dos dizeres de “protegido por lei” figurarem bem no papel e na chapa, a sua eficácia na manutenção da rede é praticamente nula. Em muitos casos, a expansão urbana e o alargamento de rodovias, aos quais a RAAP atende, colaboram para a sua extinção. Deste modo, e considerando o grande volume de dados, um diagnóstico adequado capaz de contribuir para um planejamento de prioridades de atividades de campo pode se beneficiar do uso da inteligência artificial (IA), subsidiando tomadas de decisão mais assertivas pelos gestores, e assim, viabilizando o uso adequado dos recursos para manutenção e densificação da RAAP.

Nesse contexto, destaca-se que a aplicação de IA tem se expandido na geodésia. Estudos em gravimetria evidenciam que algoritmos de aprendizado de máquina e aprendizado profundo contribuem para a fusão de dados heterogêneos, a redução de ruídos e a modelagem de variações temporais do campo de gravidade, aumentando a precisão de modelos geoidais (IDOWU e ILESANMI, 2025). Paralelamente, redes neurais artificiais têm sido aplicadas em transformações de sistemas de referência, com desempenho comparável ou superior a métodos clássicos (HUSSEIN; ALHAMADANI; HUSSEIN, 2025). Além disso, iniciativas internacionais de modernização de redes geodésicas demonstram o potencial do

uso de metodologias automatizadas e baseadas em IA para o controle de qualidade e ajuste de observações GNSS em larga escala (LEE e YUN, 2025).

De forma complementar, técnicas de inferência fuzzy têm se mostrado promissoras em diferentes aplicações geodésicas e ambientais. Permana et al. (2024) utilizaram sistema fuzzy para validar anomalias do nível do mar a partir da integração entre altimetria por satélite e marégrafos, aumentando a confiabilidade das estimativas em regiões costeiras vulneráveis. De modo similar, pesquisa recente aponta que algoritmos fuzzy podem aprimorar a precisão de receptores GPS em diferentes cenários, permitindo reduzir erros e validar coordenadas obtidas por sensores de baixo custo (HARIYONO; MARWANTO; ALIFAH, 2024).

Este artigo apresenta uma proposta metodológica baseada em lógica fuzzy para o diagnóstico e planejamento de atividades de campo da RAAP. A abordagem busca fornecer à equipe técnica uma ferramenta sistêmica que complemente os critérios atualmente pautados na experiência dos especialistas, reduzindo a subjetividade no processo decisório. No entanto, a falta de recursos específicos e uma visão dependente da experiência do especialista podem comprometer a eficácia das ações, especialmente diante da crescente demanda por dados geodésicos de alta precisão em setores como infraestrutura, segurança e meio ambiente.

2. Fundamentação teórica

A priorização de campanhas geodésicas é essencial para garantir a otimização de recursos e a eficiência nas operações de campo, onde critérios técnicos e estratégicos são rigorosamente analisados. Neste trabalho, adotou-se a lógica fuzzy por oferecer uma abordagem que permite trabalhar com a subjetividade e incerteza inerentes ao processo decisório.

A lógica fuzzy apresentada por Zadeh (1965) é uma extensão da lógica booleana tradicional que lida com incertezas e informações imprecisas, permitindo representações mais próximas do raciocínio humano. Ou seja, ao contrário da lógica tradicional, a lógica fuzzy utiliza a ideia de que todas as coisas admitem graus de pertinência. Com isso, tenta-se modelar o senso de palavras, tomada de decisão ou senso comum do ser humano (MARRO et al., 2010).

A fuzzificação através das funções de pertinência define o grau de pertencimento de um elemento a um conjunto fuzzy, permitindo representar incertezas e subjetividades de maneira matemática e a definição do grau de pertinência $\mu(x)$ das variáveis em um conjunto fuzzy pode ser representada por diferentes tipos de gráficos. Os tipos mais usuais na literatura são os triangular, trapezoidal, gaussiano e sigmoidal (MARRO et al., 2010).

O modelo triangular é uma forma simples de representação, com um pico (valor máximo) e subida e descida lineares simples. O modelo trapezoidal é como o formato triangular, mas com um platô no topo, útil para representar intervalos constantes. O modelo gaussiano é suave, contínuo, ideal para fenômenos naturais (SILVA et al., 2013). E o modelo sigmoidal mostra crescimento/decrescimento gradual, ideal para tendências (OLIVEIRA et al., 2014).

De acordo com Fernandes (2005), escolher a função de pertinência mais adequada não é uma tarefa trivial. Entretanto, em sistemas fuzzy, cujos parâmetros das funções de pertinência são completamente definidos pelo especialista, as funções de pertinência triangulares e trapezoidais são mais adequadas e diretas.

O processo de inferência avalia os níveis de compatibilidade das entradas com os antecedentes das várias regras, ativando os consequentes com intensidades proporcionais aos mesmos. Disso resulta um conjunto difuso, que será convertido em escalar na etapa de defuzzificação, fornecendo a saída do sistema (OLIVEIRA JÚNIOR, 1999, p. 65). Ou seja, a inferência fuzzy é o processo de aplicar as regras fuzzy para determinar uma saída com base nas entradas. Existem vários métodos de inferência, mas para essa pesquisa optou-se pelo método de Mamdani amplamente utilizado em sistemas de decisão fuzzy (HARB e AL-SMADI, 2006; MARRO et al., 2010; SILVA et al., 2019).

As variáveis linguísticas descritas por funções de pertinência são a base das regras. Para isso, a construção de um conjunto de regras do tipo “Se-Então” é necessária para combinar critérios fornecidos por especialistas ou extraídos de dados numéricos. A regra fuzzy de Mamdani apresenta-se de acordo com a Equação 1 a seguir (HARB e AL-SMADI, 2006):

Regra R_k : **SE** o antecedente x_1 pertence ao conjunto A_{k1} **E** o antecedente x_2 pertence ao conjunto A_{k2} **ENTÃO** o consequente y pertence ao conjunto B_k (1)

Por exemplo, se a distância (x_1) pertence ao conjunto curta (A_{k1}) e a última visita (x_2) pertence ao conjunto recente (A_{k2}), então a prioridade (y) pertence ao conjunto baixa (B_{k1}). Essas regras são aplicadas para determinar as respostas. Portanto, nessa etapa avalia-se o grau em que uma regra fuzzy é acionada, combinando entradas fuzzificadas. Diversos operadores lógicos podem ser utilizados a depender das restrições da pesquisa para a tomada de decisão. A inferência

mínima de Mamdani limita o grau de ativação da regra (α_k) da saída ao menor grau entre as entradas fuzzy, considerando-se assim um método conservador que garante que a saída não seja mais forte do que a entrada mais fraca (Equação 2) (CORDÓN et al., 2001).

$$\alpha_k = \min(\mu_{Ak1}(x_1), \mu_{Ak2}(x_2)) \quad (2)$$

Onde,

- α_k : Grau de ativação da regra;
- $\mu_{Ak1}(x_1)$: Grau de pertinência da entrada x_1 ao conjunto fuzzy A_{k1} ;
- $\mu_{Ak2}(x_2)$: Grau de pertinência da entrada x_2 ao conjunto fuzzy A_{k2} ;
- min: Operador lógico (AND) que retorna o menor valor entre $\mu_{Ak1}(x_1)$ e $\mu_{Ak2}(x_2)$.

Em seguida, para o ajuste do consequente, o grau de pertinência do conjunto fuzzy associado ao consequente (Bk) é ajustado pela ativação da regra (α_k), conforme Equação 3.

$$\mu_{ajustada,Bk}(y) = \min(\alpha_k, \mu_{Bk}(y)) \quad (3)$$

Onde,

- α_k : Grau de ativação da regra;
- $\mu_{Bk}(y)$: Função de pertinência original do conjunto consequente Bk;
- $\mu_{ajustada,Bk}(y)$: Função ajustada, considerando a contribuição limitada pelo grau de ativação.

Caso haja mais de uma variável de entrada, é necessário aplicar uma técnica de agregação dos conjuntos antecedentes, a fim de que seja gerado um conjunto consequente para cada regra de inferência, onde a combinação desses conjuntos consequentes gerará um conjunto final de saída que é geralmente resultado do operador união (máximo) (SILVA et al., 2019). Ou seja, a agregação combina as ativações de várias regras, capturando assim a maior contribuição entre todas as regras para um mesmo conjunto de saída fuzzy conforme descrito na Equação 4 (CORDÓN et al., 2001).

$$\mu_{agregado} = \max(\mu_{ajustada,B1}(y), \mu_{ajustada,B2}(y), \dots, \mu_{ajustada,Bn}(y)) \quad (4)$$

Onde,

- $\mu_{agregado}$: Função de pertinência final da saída fuzzy, resultante da combinação das funções ajustadas de todos os consequentes fuzzy ativados;
- $\mu_{ajustada,B1}(y), \mu_{ajustada,B2}(y), \dots, \mu_{ajustada,Bn}(y)$: Funções de pertinência ajustadas dos conjuntos consequentes fuzzy;
- max: Operador lógico "OU" (OR) usado para combinar as funções ajustadas dos conjuntos consequentes fuzzy.

A etapa de defuzzificação se caracteriza pela conversão de um conjunto fuzzy, com graus de pertinência, em um único valor numérico. A defuzzificação utilizada nesta pesquisa foi o método do Centróide (COG - *Center of Gravity*), que, de acordo com Calvo (2006), é uma técnica amplamente utilizada na lógica fuzzy para converter um conjunto fuzzy em um valor *crisp* (numérico). É particularmente eficaz porque considera toda a forma do conjunto fuzzy de saída, representando a média ponderada do gráfico da função de pertinência (MARRO et al., 2010). A Equação 5 apresenta a defuzzificação na sua representação discreta.

$$COG = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_{agregado}(y_i) \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n \mu_{agregado}(y_i)} \quad (5)$$

Onde,

- COG: Refere-se ao valor numérico resultante do processo de defuzzificação, representando o ponto de equilíbrio do conjunto fuzzy no domínio de saída;
- y_i : Pontos discretos pertencentes ao domínio da variável de saída y ;
- $\mu_{agregado}(y_i)$: Grau de pertinência final associado a cada ponto y_i , obtido após a agregação das funções de pertinência resultantes das regras fuzzy ativadas.

3. Metodologia

A proposta metodológica baseada em lógica fuzzy que busca facilitar o diagnóstico e planejamento de atividades de campo da RAAP foi conduzida em etapas realizadas no QGIS 3.34 (QGIS DEVELOPMENT TEAM, 2025) e no desenvolvimento de uma rotina em Python utilizando-se a biblioteca Scikit-Fuzzy 0.5.0 (WARNER et al., 2024).

3.1 Preparação dos dados

Os dados de entrada foram extraídos da página de Internet da Infraestrutura Nacional de Dados Espaciais (INDE, 2025), por meio do Visualizador da INDE. Foram adicionadas camadas por temas, selecionando a camada “Redes Geodésicas”. A partir daí, foi extraído o arquivo shapefile do tema “Rede Geodésica Altimétrica”. A Figura 1 apresenta o caminho de acesso.

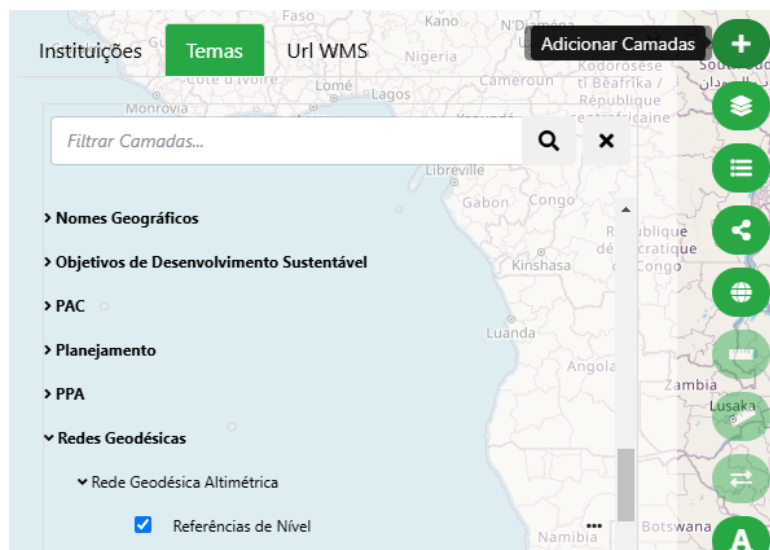


Figura 1 – Caminho para realizar o download das referências de nível no Visualizador da INDE.

Fonte: INDE (2025).

Um tema adicional foi introduzido referente às Gerências de Geodésia e Cartografia (GGC) do IBGE, localizadas em Santa Catarina, Rio de Janeiro, Goiás, Distrito Federal, Bahia, Ceará e Pará, que serviu como base para a determinação das distâncias entre as RRNN (Figura 2). A localização encontra-se disponível no site do IBGE (2025).

As características das RRNN avaliadas nessa pesquisa foram a distância entre as RRNN e as gerências, última visita, além das variáveis qualitativas de situação (destruído, não encontrado, bom) e se elas estavam conectadas às estações GNSS, pois entende-se que a prioridade é obter o maior número possível de RRNN rastreadas por GNSS. Para calcular a última visita em anos, foi necessário estabelecer um marco temporal definido em 05/02/2025, permitindo assim a conversão das datas de visitas realizadas em valores expressos em anos.

Como o objetivo da pesquisa era propor algo que gerasse subsídios para a tomada de decisão, a variável distância teve que passar por um processo de análise detalhado. Calcular uma distância linear simplesmente não resultaria em um diagnóstico fidedigno. Para auxiliar nessa etapa, utilizou-se a base de dados do OpenStreetMap (OSM) (OPENSTREETMAP, 2024) disponível na página de Internet Geofabrik GmbH (2024) para a determinação das rotas entre as gerências e as RRNN. O *plugin* QGIS Network Analysis Toolbox 3 (QNEAT3) (RAFFLER, 2025), projetado para realizar análises de rede, foi utilizado para o cálculo de rotas mais curtas. Alguns caminhos, que passavam por reserva indígena ou locais onde a técnica de travessia de massa d'água foi utilizada, tiveram que ser vetorizados. Assim, como a conexão entre Belém e Macapá onde se optou pela vetorização da rota marítima. O processo de cálculo das distâncias com a base de dados do OSM demandou um esforço computacional considerável, sendo necessário o particionamento em cinco blocos para atender a todas as regiões do país. Uma vez terminada essa fase de preparação, a etapa seguinte consistiu no processo de cálculo.

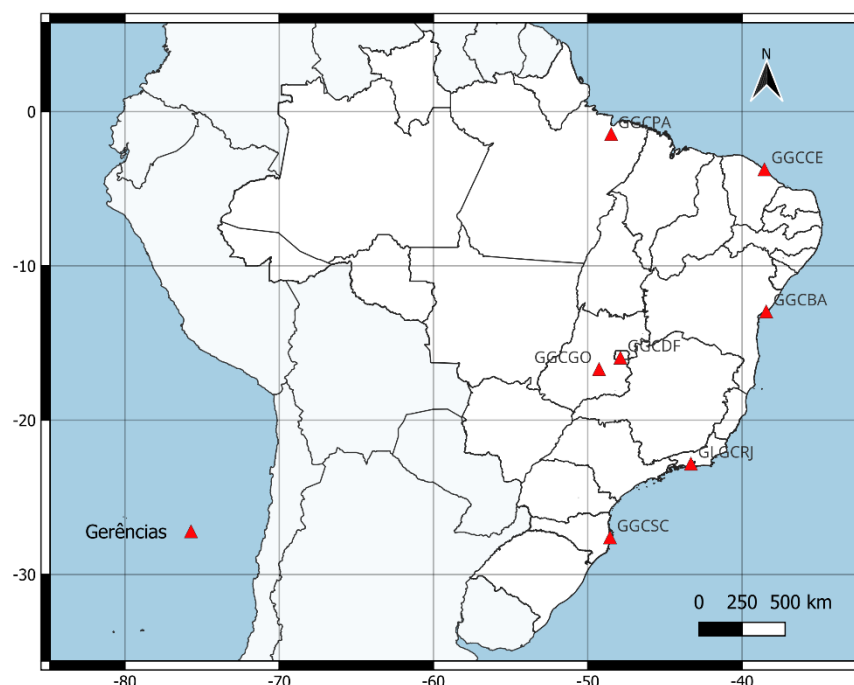


Figura 2 – Localização geográfica das gerências do IBGE.

Fonte: IBGE (2025).

3.2 Aplicação da lógica fuzzy

O processo básico da lógica fuzzy envolveu as seguintes etapas: a fuzzificação, a inferência e a defuzzificação. Nesta etapa, utilizou-se uma rotina desenvolvida em Python, sendo o processamento realizado no Google Colab (GOOGLE, 2017).

3.2.1 Fuzzificação

As variáveis de entrada para análise da rede de nivelamento foram referência de nível (RN), gerência, distância, última visita, situação e conexão GNSS, sendo as 4 últimas transformadas em graus de pertinência por meio de funções de pertinência. O intervalo de pertinência é $[0, 1]$, sendo “0” um elemento não pertencente a determinado conjunto e “1” totalmente pertencente. Valores entre 0 e 1 representam graus parciais de pertinência. Essa etapa apresenta uma subjetividade inerente a lógica fuzzy que determinará os passos seguintes. A calibração adequada dada pelo especialista é essencial, pois conjuntos fuzzy mal dimensionados podem resultar em interpretações imprecisas das variáveis linguísticas, afetando a confiabilidade e a consistência dos resultados obtidos (ÖZKAN e TÜRKŞEN, 2014). Isso pode levar a decisões inadequadas ou incompatíveis com a realidade do problema analisado. Para esta pesquisa, adotou-se as seguintes representações para determinação das funções de pertinência (Tabela 1) e sua visualização gráfica (Figura 3):

Tabela 1 – Estruturação de conjuntos fuzzy para as variáveis linguísticas da pesquisa.

Variável linguística	Função de pertinência	Conjunto fuzzy
Distância curta (km)	Trapezoidal	$[0,0,500,800]$
Distância média (km)	Trapezoidal	$[600,1000,1500,2000]$
Distância longa (km)	Trapezoidal	$[1800,2100,4500,4500]$
Visita recente (anos)	Trapezoidal	$[0,0,8,12]$
Visita moderada (anos)	Triangular	$[10,15,20]$
Visita antiga (anos)	Trapezoidal	$[18,24,80,80]$

Situação da RN (destruída)	Triangular	[0,0,1]
Situação da RN (não encontrada)	Triangular	[0.5,1,1.5]
Situação da RN (boa)	Triangular	[1,2,2]
Conexão GNSS (sim)	Triangular	[0,0,1]
Conexão GNSS (não)	Triangular	[0,1,1]
Prioridade baixa (%)	Trapezoidal	[0,0,20,50]
Prioridade média (%)	Trapezoidal	[30,40,60,70]
Prioridade alta (%)	Trapezoidal	[50,80,100,100]

Fonte: Autores (2025).

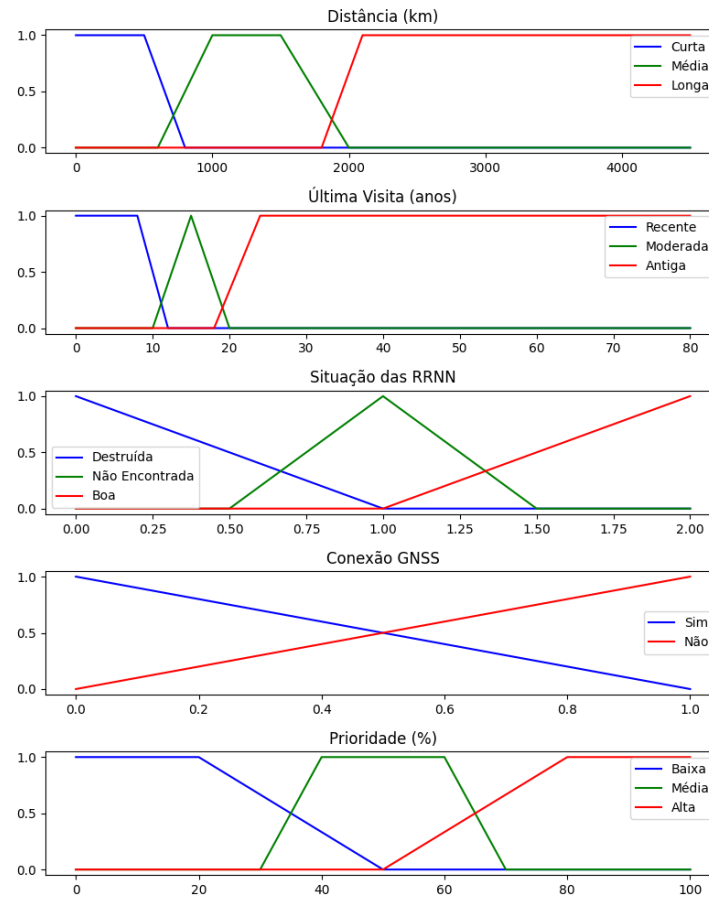


Figura 3 – Representação gráfica das funções de pertinência.

Fonte: Autores (2025).

Na modelagem da variável distância, definiu-se como curtas aquelas inferiores a 500 km em relação à respectiva gerência, com um decaimento gradual da pertinência até 800 km. Entretanto, distâncias superiores a 600 km já poderiam ser classificadas como médias, sendo essa categorização mais consolidada no intervalo entre 1.000 e 1.500 km. A partir de 1.500 km, observa-se uma transição progressiva na qual a pertinência ao conjunto médio diminui gradualmente até 2000 km. A faixa de transição ocorre em distâncias a partir de 1.800 km que passam a ser comumente interpretadas como longas, enquanto aquelas superiores a 2.100 km são classificadas, de forma consistente, como longas.

A variável última visita foi modelada de forma a considerar recentes, aquelas visitas realizadas até 8 anos atrás, com uma transição gradual até 12 anos. As visitas moderadas atingem sua pertinência máxima em 15 anos, com zona de transição suave entre 10 e 20 anos. E visitas acima de 24 anos são consideradas antigas com pertinência máxima, enquanto há uma transição gradual começando em 18 anos.

Em relação à situação da RN, a destruída é plenamente satisfeita no ponto 0, com transições suaves até o ponto 1. E a situação de RN boa é satisfeita no ponto 2, com transições suaves a partir de 1. A variável linguística mais delicada e em maior quantidade é a RN não encontrada, que pode transitar entre a destruída e a boa, já que, na falta de vestígios, a RN pode ter sido realmente destruída ou estar em local de difícil acesso. Ampliar esse cadastro com questões relacionadas à melhoria da qualidade das coordenadas e informações sobre obras de engenharia, como ampliações viárias, reformas urbanas, entre outros, pode tornar esse conjunto fuzzy mais robusto.

Sobre a conexão GNSS, a interpretação é simples, já que o objetivo é obter o maior número possível de RRNN conectadas por GNSS. Nesse sentido, um cadastro com indicação de possibilidade de rastreamento pode tornar esse conjunto fuzzy mais representativo da realidade de campo.

E para facilitar a análise da etapa de defuzzificação, as categorias de prioridade (baixa, média e alta) foram modeladas em termos de percentual de relevância, contribuindo para a etapa de categorização para visualização espacial.

3.2.2 Inferência

Para o diagnóstico da RAAP foi construído um conjunto de 24 regras. Essas regras foram aplicadas para determinar as respostas. Exemplificando com os dados dessa pesquisa, se uma RN não é visitada há mais de 40 anos e sua situação no banco de dados é boa, a prioridade é alta. A Tabela 2 a seguir apresenta cada uma das regras da pesquisa.

Tabela 2 – Conjunto de regras adotadas para a inferência.

Regras	SE	E	ENTÃO
1	distância curta	visita recente	prioridade baixa
2	distância curta	visita moderada	prioridade média
3	distância curta	visita antiga	prioridade alta
4	distância média	visita recente	prioridade baixa
5	distância média	visita moderada	prioridade média
6	distância média	visita antiga	prioridade alta
7	distância longa	visita recente	prioridade baixa
8	distância longa	visita moderada	prioridade média
9	distância longa	visita antiga	prioridade alta
10	visita recente	situação destruída	prioridade baixa
11	visita recente	não encontrada	prioridade baixa
12	visita recente	situação boa	prioridade baixa
13	visita moderada	situação destruída	prioridade baixa
14	visita moderada	não encontrada	prioridade baixa
15	visita moderada	situação boa	prioridade média
16	visita antiga	situação destruída	prioridade baixa
17	visita antiga	não encontrada	prioridade baixa
18	visita antiga	situação boa	prioridade alta
19	situação destruída	conectado	prioridade baixa
20	situação destruída	não conectado	prioridade baixa
21	não encontrada	conectado	prioridade baixa
22	não encontrada	não conectado	prioridade baixa
23	situação boa	conectado	prioridade baixa
24	situação boa	não conectado	prioridade alta

Fonte: Autores (2025).

A partir das regras definidas de acordo com a Equação 1, determinam-se os graus de ativação das regras fuzzy, conforme apresentado na Equação 2. Com os graus de ativação definidos, prossegue-se para o ajuste dos consequentes, estabelecendo a vinculação das regras ao conjunto de saída correspondente, de acordo com a Equação 3.

A etapa final da inferência caracteriza-se pela agregação, conforme Equação 4, que consolida os resultados individuais das regras fuzzy em um único conjunto fuzzy para a saída. Usualmente, o operador max é usado para combinar as ativações de várias regras, capturando assim a maior contribuição entre todas as regras para um mesmo conjunto de saída fuzzy, ou

seja, a agregação é o processo de combinar os resultados de várias regras fuzzy. Isso garante que todas as regras influenciem a saída final, mantendo uma representação completa.

3.2.3 Defuzzificação

Nessa etapa utilizou-se a Equação 5 para conversão de um conjunto fuzzy, com graus de pertinência, em um único valor numérico. A defuzzificação utilizada nesta pesquisa foi o método do Centróide (COG - *Center of Gravity*). A Figura 4 representa um exemplo de saída gráfica com o valor da prioridade calculada em porcentagem. Nesse exemplo, o valor de 65,14% representa uma prioridade média para verificação da realidade física da RN.

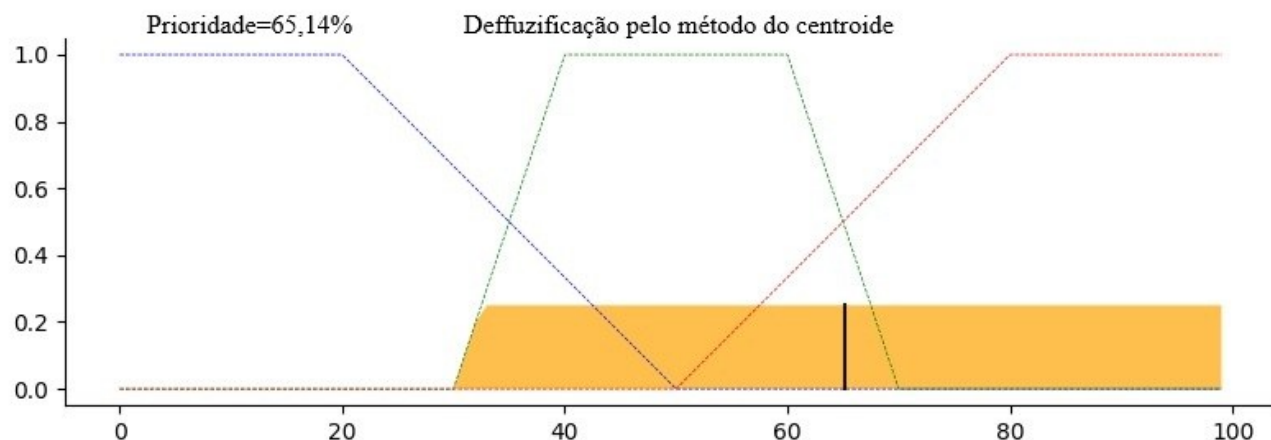


Figura 4 – Exemplo de gráfico resultado da defuzzificação pelo método do centroide.
Fonte: Autores (2025).

3.2.4 Ordenamento e categorização

Após a saída da defuzzificação, os dados passaram por um ordenamento baseado na distância entre as gerências e as RRNN, para garantir que os dados sejam organizados de forma hierárquica, ou seja, para cada RN tem-se uma lista de gerências que podem atuar por ordem de prioridade. Isso contribui para o planejamento de atividades de campo. Em seguida, os dados foram categorizados em prioridades baixa, média e alta para facilitar a tomada de decisão (Equação 6).

$$Categoria = \begin{cases} Baixa, se prioridade \leq 50\% \\ Média, se 50\% < prioridade \leq 70\% \\ Alta, se prioridade > 70\% \end{cases} \quad (6)$$

4. Resultados e discussão

O diagnóstico das prioridades da RAAP 2025 apontou a prioridade alta para 22.524 RRNN, prioridade média para 7.919 e prioridade baixa para 41.032 (Tabela 3).

Tabela 3 – Prioridades de visitação por gerência

Gerência	Prioridade alta	Prioridade média	Prioridade baixa	Total
GGCBA	3.703	655	5.338	9.696
GGCCE	3.827	1.638	7.416	12.881
GGCDF	4.023	333	3.073	7.429
GGCGO	4.725	1.202	7.224	13.151
GGCPA	1.475	1.114	4.707	7.296
GGCSC	3.339	991	5.126	9.456

GLGC	1.432	1.986	8.148	11.566
Total geral	22.524	7.919	41.032	71.475

Fonte: Autores (2025).

Analisando os resultados da prioridade alta, um fato que chama a atenção é que 376 RRNN estão localizadas a menos de 50 km de uma gerência, o que a princípio aponta a necessidade de resolver esses casos de baixo custo com máxima urgência. A faixa com a maior concentração de RRNN que necessitam de uma verificação da realidade física (VRF) é entre 500 e 1.000 km. A gerência de Goiás possui RRNN em distâncias consideravelmente longas devido à responsabilidade de atuação na parte mais ocidental da região amazônica em que os acessos terrestres são mais limitados. A Tabela 4 apresenta o resumo por faixa de distância. Na Figura 5 é possível visualizar as RRNN com prioridade alta categorizadas por gerência.

Tabela 4 – Distribuição quantitativa de RRNN prioridade alta por gerência e faixa de distância.

Gerência	X ≤ 50 km	50 km < X ≤ 100km	100 km < X ≤ 500 km	500 km < X ≤ 1.000km	1.000 km < X ≤ 2.000km	2.000 km < X ≤ 3.000km	3.000 km < X ≤ 4.500km	Total
GGCBA	100	150	1.715	1.738	0	0	0	3.703
GGCCE	44	48	1.221	2.439	75	0	0	3.827
GGCDF	53	120	1.854	1.928	68	0	0	4.023
GGCGO	113	145	1.182	1.297	1.106	211	671	4.725
GGCPA	2	0	217	881	375	0	0	1.475
GGCSC	23	28	1.271	1.976	41	0	0	3.339
GLGC	41	30	781	580	0	0	0	1.432
Total geral	376	521	8.241	10.839	1.665	211	671	22.524

Fonte: Autores (2025).

Na Tabela 5, temos a estratificação da prioridade alta por última visita. Das 22.524 RRNN, 19.388 não são visitadas há mais de 20 anos. A VRF das RRNN é fundamental para a reversão desse quadro.

Tabela 5 – Última visita das RRNN de prioridade alta.

Última visita (anos)	Quantidade de RRNN
70 < X	1.304
60 < X ≤ 70	1.077
50 < X ≤ 60	1.501
40 < X ≤ 50	5.219
30 < X ≤ 40	5.766
20 < X ≤ 30	4.521
10 < X ≤ 20	3.136

Fonte: Autores (2025).

As prioridades médias são compostas por 7.919 RRNN com registro de última visita entre 9 e 16 anos e que não possuem conexão GNSS (Figura 6). Ressalta-se que nem todas as RRNN possuem possibilidade de rastreamento GNSS. Entretanto, essa informação não está disponível no banco de dados utilizado como referência.

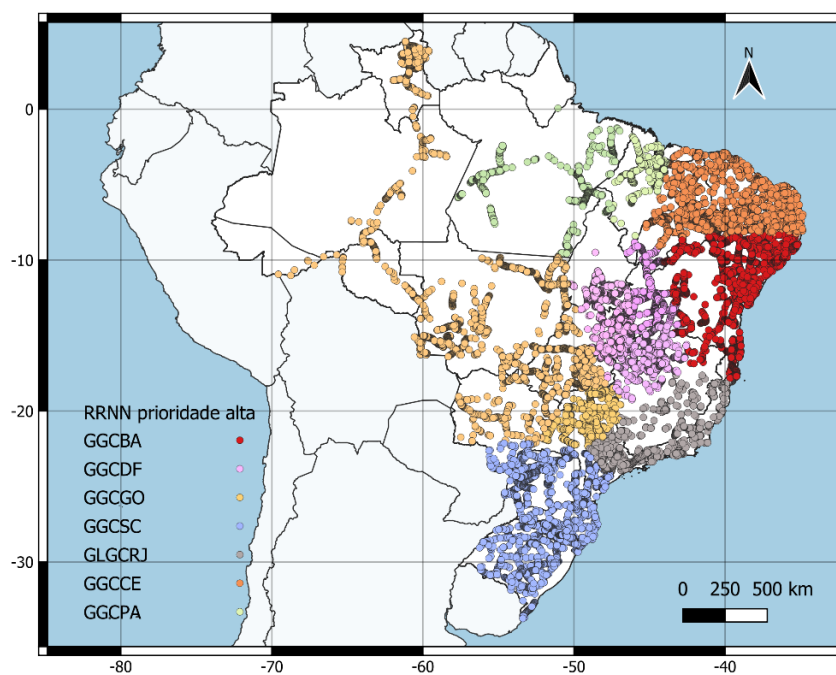


Figura 5 – RRNN com prioridade alta categorizado por gerência.

Fonte: Autores (2025).

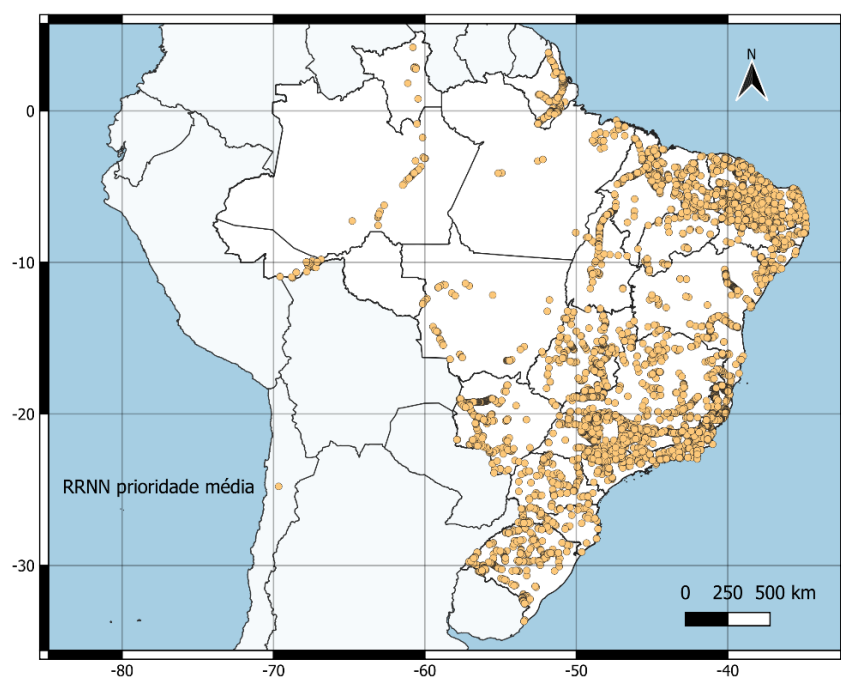


Figura 6 – RRNN com prioridade média.

Fonte: Autores (2025).

A prioridade baixa (Figura 7) é representada por RRNN classificadas como boas, não encontradas e destruídas. As classificadas como Boa totalizam 5.555, construídas ou visitadas recentemente, sendo que 1.280 possuem conexão GNSS.

As RRNN destruídas somam 9.155 e as não encontradas, 26.322 (Tabela 6). Destruídas e não encontradas representam 49,6% da rede altimétrica. Esse diagnóstico pode ser ainda pior já que das 22.524 RRNN classificadas como prioridade alta e em bom estado no banco de dados, 19.388 não são visitadas há mais de 20 anos.

Tabela 6 – Situação das RRNN com prioridade baixa.

Prioridade baixa	Com conexão GNSS	Sem conexão GNSS	Total
Boa	1.280	4.275	5.555
Não encontrada	55	26.267	26.322
Destruída	62	9.093	9.155

Fonte: Autores (2025).

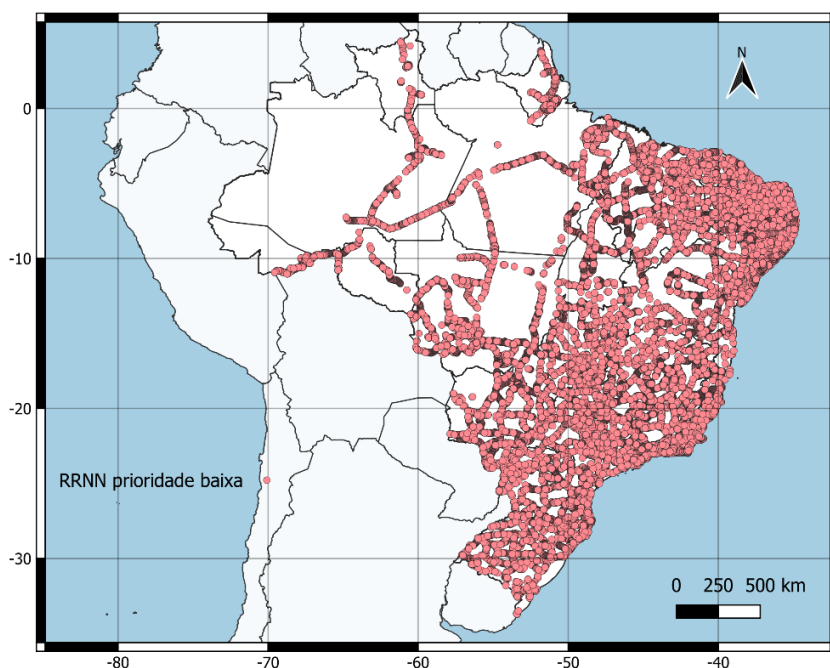


Figura 7 – RRNN com prioridade baixa.

Fonte: Autores (2025).

5. Considerações finais

A infraestrutura geodésica de um país, muitas vezes um componente invisível, permite minimizar o custo-país, potencializando o planejamento, desenvolvimento e execução de atividades com confiabilidade posicional e integração eficiente entre diferentes setores, como transporte, meio ambiente, engenharia e gestão territorial, garantindo suporte preciso para tomadas de decisão e otimização de recursos.

A apresentação desta proposta metodológica, baseada em lógica fuzzy, teve como objetivo oferecer uma alternativa robusta e adaptável aos métodos tradicionais, alinhando-se à complexidade das decisões relacionadas a campanhas geodésicas. Avaliar as prioridades das gerências no planejamento das atividades de campo traz diversas vantagens, e o sistema fuzzy permitiu uma representação mais gradual das variáveis analisadas, refletindo melhor o raciocínio humano. Além disso, a lógica fuzzy gera uma saída nítida de prioridade, o que facilita a ordenação das RRNN de maneira mais refinada, especialmente na hora de alocar recursos limitados.

Por outro lado, a implementação desse sistema exige um conhecimento especializado para definir corretamente as funções de pertinência e as regras fuzzy. Essa demanda se torna clara devido à certa subjetividade envolvida na modelagem dos termos linguísticos e na escolha dos parâmetros, o que pode afetar a consistência dos resultados baseados nas regras estabelecidas. Nesse sentido, recomenda-se a realização de uma pesquisa orientada junto aos especialistas responsáveis

pelo planejamento das atividades de campo da rede de nivelamento em todas as gerências, com o objetivo de tornar a modelagem dos parâmetros utilizados nesta pesquisa mais robusta e alinhada às realidades regionais.

A principal recomendação para utilização dessa metodologia é manter o banco de dados o mais atualizado possível. Além disso, os critérios de situação e conexão podem ser complementados futuramente com informações mais relevantes, como, por exemplo, se houve duplicação de rodovia, se a estação é passível de conexão GNSS, etc.

A determinação das rotas com base no OSM brindou o diagnóstico com o toque necessário para o planejamento de atividades de campo. As distâncias mais realistas facilitarão a inserção de custos de campanha futuramente, auxiliando de forma decisiva a análise do especialista.

Quanto ao diagnóstico da RAAP, os resultados alertam para uma necessidade urgente de se pensar em estratégias para sua densificação e manutenção. A revitalização completa da rede num país de dimensões continentais como o Brasil é inviável, porém pontos estratégicos da rede, como por exemplo, nas futuras estações IHRF, nos nós da rede, áreas de proteção ambiental e em pesquisas de interesse nacional utilizando RRNN de alta confiabilidade, podem contribuir significativamente para a sua preservação e funcionalidade. Ademais, a rede altimétrica ganhou mais relevância na era espacial, especialmente devido à necessidade de pontos de referência no terreno para aferição precisa de modelos geoidais.

Pensar numa iniciativa participativa da sociedade com premiação anual poderia ampliar o conhecimento e reconhecimento da importância das redes geodésicas, contribuindo para a atualização do Banco de Dados Geodésico (BDG), já que atualmente muitos usuários possuem equipamentos smartphones com câmera e GNSS.

Por fim, a utilização da IA aplicada no presente estudo correspondeu a uma inovação de grande impacto no diagnóstico e planejamento de rede de nivelamento, auxiliando na tomada de decisão. Além disso, avanços recentes, como a fuzzificação profunda integrada ao aprendizado de máquina (YANG; ZHANG; SHANGGUAN, 2025), apontam para a possibilidade de reduzir a dependência do especialista e aprimorar a adaptabilidade dos sistemas fuzzy, o que poderá ser explorado em trabalhos futuros sobre redes de referência no Brasil.

Referências

- ALENCAR, J. C. M. de. *Sistema nacional de nivelamento de 1ª ordem*. Rio de Janeiro: IBGE, 1968. Trabalho apresentado na I Conferência Nacional de Geociências, realizada no Rio de Janeiro, em 1968. Disponível em: <https://artigos.ibge.gov.br/artigos-home/geodesia/ate1989/3138-sistema-nacional-de-nivelamento-de-1a-ordem-1968.html> Acesso em: 03/01/2025.
- CALVO, O. *Fuzzy Control of Chaos*, StudFuzz 187, 99–125 (2006) In: Li, Z., Halang, W.A., Chen, G. (eds) Integration of Fuzzy Logic and Chaos Theory. Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol 187. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/3-540-32502-6_5
- CHAO, K. C.; OVERTON, D. D.; NELSON, J. D. *Design and Installation of Deep Benchmarks in Expansive Soil*. Journal of Surveying Engineering. 2006. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9453\(2006\)132:3\(124\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9453(2006)132:3(124))
- CORDÓN, O., HERRERA F., HOFFMANN, F., MAGDALENA, L. *Genetic Fuzzy Systems: Evolutionary Tuning and Learning of Fuzzy Knowledge Bases*. Volume 19 de Advances in fuzzy systems - Applications and theory. Editora World Scientific, 2001. ISBN: 9810240171, 9789810240172.
- FERNANDES, Rafael Tramontini. *Supervisão de um Sistema Híbrido eólico/diesel usando Lógica Fuzzy*. 2005. 100f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica). Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande-MS, 2005. <https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/656>
- GEOFABRIK GMBH. *South America: Brazil – OSM data extracts*. Karlsruhe, 2024. Disponível em: <https://download.geofabrik.de/south-america/brazil.html> Acesso em: 05/01/2025.
- GOOGLE. *Google Colaboratory*. [S. l.]: Google, 2017. Disponível em: <https://colab.research.google.com/> Acesso em: 30 set. 2025.
- HARB, A.M.; AL-SMADI, I. (2006). *Chaos Control Using Fuzzy Controllers (Mamdani Model)*. In: Li, Z., Halang, W.A., Chen, G. (eds) Integration of Fuzzy Logic and Chaos Theory. Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol 187. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/3-540-32502-6_6

- HARIYONO, M. A.; MARWANTO, A.; ALIFAH, S. A fuzzy logic approach to enhance GPS accuracy for blood cooler box tracking. *Indonesian Journal of Electronics, Electromedical Engineering, and Medical Informatics*, v. 6, n. 1, p. 52-58, 2024. DOI: <https://doi.org/10.35882/fbsvte54>
- HUSSEIN, Zahraa Ezzulddin; ALHAMADANI, Oday Zeki; HUSSEIN, Wisam Abdulkadhim. Utilizing Artificial Neural Networks for 2D Coordinate Transformation: A Case Study on the Reference System of Iraq. *Iraqi Journal of Science*, p. 955-969, 2025. <https://www.ijs.uobaghdad.edu.iq/index.php/eijs/article/download/11072/6721>
- IBGE. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. *Reajustamento da rede altimétrica com números geopotenciais*. 2. ed. Rio de Janeiro, 2019. 54 p. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101666.pdf> Acesso em: 03/01/2025.
- IBGE. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. *Modelo hgeoHNOR2020 para conversão de altitudes geométricas em altitudes normais*. IBGE, Coordenação de Geodésia. - 2. ed. - Rio de Janeiro : IBGE, 2023. 51 p. - (Relatórios Metodológicos, ISSN 0101-2843 ; v. 47). Inclui glossário. ISBN 978-85-240-4589-9. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv102048.pdf> Acesso em: 03/01/2025
- IBGE. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. *Relatório de estação geodésica: RN4045N*. Disponível em: <http://www.bdg.ibge.gov.br/bdg/pdf/relatorio.asp?L1=4045N> Acesso em: 08/12/2024.
- IBGE. Instituto Brasileiro de Geografia e estatística. 2025. *Acesso à informação. Quem é quem*. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/acesso-informacao/institucional/quem-e-quem.html> Acesso em: 05/02/2025.
- IDOWU, T. O.; ILESANMI, K. S. A Review of the Challenges and Prospects of Artificial Intelligence Applications in Gravimetric Geodesy. *Journal of Spatial Information Sciences*, v. 2, n. 1, p. 26-40, 2025. <https://journals.unizik.edu.ng/jsis/article/download/5343/4423>
- IGN. Institut National de L'information Géographique et Forestière. *National Report France*. 2019. Disponível em: <https://www.isgeoid.polimi.it/Geoid/Europe/France/05-08-France.pdf> Acesso em: 18/12/ 2024.
- INDE. Infraestrutura Nacional de Dados Especiais. 2025. Disponível em: <https://inde.gov.br/> Acesso em: 05/02/ 2025.
- LEE, Seung-Jun; YUN, Hong-Sik. Nationwide Adjustment of Unified Geodetic Control Points for the Modernization of South Korea's Spatial Reference Frame. *Applied Sciences*, v. 15, n. 10, p. 5500, 2025. <https://www.mdpi.com/2076-3417/15/10/5500>
- LUZ, R.T.; GUIMARÃES, V.M. *Realidade e Perspectivas da Rede Altimétrica de Alta Precisão do Sistema Geodésico Brasileiro*. II Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas, Curitiba, PR, 2001. Disponível em: https://geoftp.ibge.gov.br/metodos_e_outros_documentos_de_referencia/outros_documentos_tecnicos/apresentacoes_artigos/2001-Realidade_e_Perspectivas_da_RAAPSGB.zip Acesso em: 18/12/ 2024.
- MARRO et al. *Lógica Fuzzy: Conceitos e aplicações*, 2010. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/228595876_Logica_Fuzzy_Conceitos_e_aplicacoes Acesso em: 05/12/ 2024.
- OLIVEIRA, Fabricia Benda; RODRIGUES DE OLIVEIRA, Carlos Henrique; LIMA, Julião Soares de Souza; et al. *Aplicação de geoprocessamento e lógica fuzzy para criação de zoneamento no parque estadual da cachoeira da fumaça/ES para fins de conservação*. Revista Brasileira de Cartografia, [S. l.], v. 66, n. 3, 2014. DOI: <https://doi.org/10.14393/rbcv66n3-44761> Acesso em: 06/01/2025.
- OLIVEIRA JÚNIOR, H. A. *Lógica Difusa: Aspectos Práticos e Aplicações*. 1999. Editora Interciência. Rio de Janeiro.
- OPENSTREETMAP. *OpenStreetMap: dados geoespaciais colaborativos*. 2024. Disponível em: <https://www.openstreetmap.org> Acesso em: 15/12/2024.

- ÖZKAN, İ., TÜRKŞEN, İ.B. (2014). *Uncertainty and Fuzzy Decisions*. In: Banerjee, S., Erçetin, Ş., Tekin, A. (eds) *Chaos Theory in Politics. Understanding Complex Systems*. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-017-8691-1_2
- PERMANA, R. D.; GAOL, J. L.; IRAWATI, F. D. et al. Regional validation coastal sea level anomaly estimation from altimetry satellite and tide gauges data using fuzzy inference system: a case study around Natuna Seas. *Journal of Science and Applicative Technology* vol. 8 (2), 2024, pp. 105-113. DOI: <https://doi.org/10.35472/jsat.v8i2.1851>
- POETZSCHKE, H. *Motorized Leveling at the National Geodetic Survey*. NOAA Technical Memorandum NOS NGS 26. Rockville, Md. 1980. Disponível em: https://www.ngs.noaa.gov/PUBS_LIB/MotorizedLeveling_at_the_National_Geodetic_Survey_TM_NOS_NGS26.pdf Acesso em: 15/12/ 2024
- PORTAL DO ESTADO DO AMAPÁ. Estado e IBGE concluem revitalização da rede de mapeamento do território. *Portal Amapá*, 2016. Disponível em: <https://www.portal.ap.gov.br/noticia/2410/estado-e-ibge-concluem-revitalizacao-da-rede-de-mapeamento-do-territorio>. Acesso em: 30/09/2025.
- QGIS DEVELOPMENT TEAM. *QGIS Geographic Information System*. Versão 3.34. [S. l.]: Open Source Geospatial Foundation, 2025. Disponível em: <https://qgis.org/> Acesso em: 30/09/2025.
- RAFFLER, C. *QNEAT3: QGIS Network Analysis Toolbox 3*. Versão 1.0.8 [S. l.], 2025. Disponível em: <https://plugins.qgis.org/plugins/QNEAT3/> Acesso em: 30 set. 2025.
- SANTOS, M.C. *Tendências modernas e questões relacionadas com a definição e realização de sistemas verticais: a experiência canadense*. Revista Brasileira de Cartografia (2015), Nº 67/8 Edição Especial 26º CBC: 1627-1639 Sociedade Brasileira de Cartografia, Geodésia, Fotogrametria e Sensoriamento Remoto ISSN: 1808-0936 <https://doi.org/10.14393/rbcv67n0-49252> Acesso em: 03/11/2024.
- SILVA, L. M.; GONÇALVES, R. M.; LIRA, M. M. S.; PEREIRA, P. S. *Modelagem Fuzzy aplicada na detecção da vulnerabilidade à erosão costeira*. Boletim de Ciências Geodésicas: Curitiba, v. 19, n. 4, P. 746-764, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S1982-217020130004000014> Acesso em: 09/09/2024.
- SILVA, L. M.; GONÇALVES, R. M.; FERREIRA, L. M.; SILVA, E. J. A.; SILVA, B. Q. *Estado da arte dos fundamentos e ideias da Lógica Fuzzy aplicada as Ciências e Tecnologia*. R. bras. Geom., Curitiba, v. 7, n. 3, p. 149-169, jul/set. 2019. Doi: [10.3895/rbgeo.v7n3.9365](https://doi.org/10.3895/rbgeo.v7n3.9365). Acesso em: 09/09/2024.
- SIRGAS. Sistema de Referência Geodésico para as Américas. *Orientações para seleção de estações IHRF*. 2021. Disponível em: <https://sirgas.ipgh.org/docs/Guias/Orientacoes%20para%20selecao%20de%20estacoes%20IHRF.pdf> Acesso em: 08/12/2024
- SOARES, S.; SANTOS, E. G. dos; LUZ, R. T. *Rede geodésica de referência costeira (RGRC) como insumo para integração de altitudes e profundidades: resultados preliminares*. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE CIÊNCIAS GEODÉSICAS E TECNOLOGIAS DA GEOINFORMAÇÃO, 7., 2018, Recife. Anais [...]. Recife: Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, 2018. p. 742-751. Disponível em: <https://www.ufpe.br/documents/39451/1384233/Anais+do+VII+SIMGEO/2ff23c73-935d-4418-8728-fefb24630f34> Acesso em: 21/12/2024.
- VAN WESTRUM, D., AHLGREN, K., HIRT, C., et al. *A Geoid Slope Validation Survey (2017) in the rugged terrain of Colorado, USA*. J Geod 95, 9. 2021. <https://doi.org/10.1007/s00190-020-01463-8> Acesso em: 18/09/2024.
- VESTØL, O., ERIKSSON, P.-O., JEPSEN, C., et al. *Review of current and near-future levelling technology – a study project within the NKG working group of Geoid and Height Systems*. Lantmäterirapport 2014:2, Reports in Geodesy and Geographical Information System, Lantmäteriet, Gävle, 51 p., 2014. Disponível em: https://www.lantmateriet.se/contentassets/85bfe36b48a04d4d8d652ed790c309d0/lantmaterirapport_2014_2.pdf Acesso em: 05/12/ 2024

-
- WANG, Y.M., SÁNCHEZ, L., ÅGREN, J. et al. *Colorado geoid computation experiment: overview and summary*, Journal of Geodesy Vol. 95, article 127, pages 1-21. 2021. <https://doi.org/10.1007/s00190-021-01567-9> Acesso em: 18/09/2024.
- WARNER, Josh; SEXAUER, Jason; Broeck , WOUTER, Van den Broeck; et al. *Scikit-Fuzzy 0.5.0*. Zenodo, 2024. <https://doi.org/10.5281/zenodo.13372212>
- YANG, Li; ZHANG, Hao; SHANGGUAN, Shijun. Fuzzy Control Algorithm for Underwater Weed Localization in Geodesy and Satellite Navigation: L. Yang et al. *International Journal of Fuzzy Systems*, p. 1-19, 2025. <https://link.springer.com/article/10.1007/s40815-025-02045-6>
- ZADEH, L.A. Fuzzy sets, Information and Control, Volume 8, Issue 3, Pages 338-353, ISSN 0019-9958, 1965. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X) Acesso em: 03/09/2024.
- ZAVALETA, J. *Modelagem e Simulação de Sistemas Usando Lógica Fuzzy com Python: Teoria e prática*. 1ª edição. Rio de Janeiro. Editora Cerceau, 2023. ISBN: 9786500695496. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.17655/9786500695496> Acesso em: 15/12/2024.