

## TERMOS SINGULARES INDEFINIDOS: FREGE, RUSSELL E A TRADIÇÃO MATEMÁTICA

Daniel Durante Pereira Alves \*

**Resumo:** É bem conhecida a divergência entre as posições de Gottlob Frege e Bertrand Russell com relação ao tratamento semântico dado a sentenças contendo termos singulares indefinidos, ou seja, termos singulares sem referência ou com referência ambígua, tais como ‘*Papai Noel*’ ou ‘*o atual rei da França*’ ou ‘ $\frac{1}{0}$ ’ ou ‘ $\sqrt{4}$ ’ ou ‘*o autor de Principia Mathematica*’. Para Frege, as sentenças da linguagem natural que contêm termos indefinidos não formam declarações e portanto não são nem verdadeiras nem falsas. Já para as sentenças da matemática, Frege defende que elas precisam ser corrigidas através da convenção forçada de uma referência não ambígua. Russell, por outro lado, aceita os termos indefinidos e propõe, através de sua teoria das descrições definidas, uma maneira de avaliar as sentenças em que eles ocorrem; e Quine amplia a teoria de Russell para abranger também os nomes com problemas de referência. Na prática da matemática são comuns os termos singulares indefinidos, sem referência, tais como ‘ $\frac{1}{0}$ ’, ou com referência ambígua, tais como ‘ $\sqrt{4}$ ’. Apesar de não haver uma sistematização rigorosa desta situação entre os matemáticos, há, no entanto, um conjunto de regras convencionais que tradicionalmente costumam ser aplicadas no tratamento matemático dos termos indefinidos. Nossa proposta é tomar a convenção matemática como inspiração e modelo para apresentar uma interpretação semântica formal para as descrições definidas e os nomes e utilizá-la como um argumento que favorece a abordagem de Russell relativamente à de Frege.<sup>1</sup>

**Palavras-chave:** Semântica. Descrições definidas. Referência. Funções parciais. Nomes. Termos singulares.

**Abstract:** It is well known the difference between the positions Gottlob Frege and Bertrand Russell regarding the semantic treatment of sentences containing indefinite singular terms, which are terms without or with ambiguous references, such as ‘*Santa Claus*’ or ‘*the present King of France*’ or ‘ $\frac{1}{0}$ ’, or ‘ $\sqrt{4}$ ’, or ‘*the author of Principia Mathematica*’. For Frege, sentences of natural language containing undefined terms do not form statements and therefore they are neither true nor false. As for the sentences of mathematics, Frege argues that they need to be corrected by a forced convention settling to them an unambiguous reference. Russell, on the other hand, accepts undefined terms and proposes a way to evaluate sentences in which they occur through his theory of definite descriptions; and Quine extends Russell’s theory to encompass also the names with problems of reference. In mathematical practice, singular terms without reference, such as ‘ $\frac{1}{0}$ ’, or with ambiguous references, such as ‘ $\sqrt{4}$ ’, are very common. Although there is no rigorous systematization to deal with them among mathematicians, there is, however, a conventional set of rules traditionally applied in the mathematical treatment of undefined terms. Our proposal is to take the mathematical convention as an inspiration and model to present a formal semantic interpretation for definite descriptions and names and use it as an argument favoring Russell’s over Frege’s approach.

**Keywords:** Semantic. Definite descriptions. Reference. Partial functions. Names. Singular terms.

---

\*Professor de Filosofia da Universidade Federal do Rio Grande do Norte. E-mail: [durante@ufrnet.br](mailto:durante@ufrnet.br)

<sup>1</sup> Gostaria de agradecer ao Prof. José Eduardo Moura, pela cuidadosa leitura, correções e sugestões.

## Introdução

Não é incomum encontrarmos nos discursos *termos singulares indefinidos*, ou seja, expressões com a função sintática de termos singulares, mas que ou não se referem a nada ou referem-se ambigualmente a mais de um objeto ou indivíduo. Não temos qualquer problema, por exemplo, em entender o significado da expressão ‘*o atual rei da França*’. Sabemos que ela é uma *descrição definida*, uma descrição que, por iniciar-se com um artigo definido, espera-se que denote uma única e específica pessoa. O problema é que a França é uma república e, portanto, não tem rei. Então não há nada que seja a referência da expressão ‘*o atual rei da França*’.

Outros exemplos de termos singulares indefinidos são:

- *O autor de ‘Principia Mathematica’* <sup>2</sup>
- *O nono planeta do sistema solar* <sup>3</sup>
- *Papai Noel* <sup>4</sup>
- $\frac{1}{0}$  <sup>5</sup>
- $\sqrt{4}$  <sup>6</sup>

Há algumas questões interessantes que os termos singulares indefinidos suscitam. Considere as seguintes sentenças:

- *O atual rei da França é careca.*
- *O autor de ‘Principia Mathematica’ ganhou um prêmio Nobel.*
- *O nono planeta do sistema solar chama-se Plutão.*
- *Papai Noel mora no polo norte.*
- $\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$
- $\sqrt{4} > 0$

Como todas estas sentenças possuem termos singulares indefinidos, elas nos impõem algumas questões: estamos, de fato, dizendo alguma coisa quando as proferimos ou elas são apenas erros linguísticos? Se elas são erros linguísticos, são erros de que natureza? Não são erros sintáticos, já que são expressões gramaticalmente bem formadas. Seriam então erros semânticos? Mas o que é, exatamente, um erro semântico? É erro de quem profere ou erro de quem interpreta a sentença? Neste caso, o que dizer da terceira sentença, que não seria erro linguístico

<sup>2</sup> Como a obra *Principia Mathematica* tem dois autores, Russell e Whitehead, então a descrição é um termo singular indefinido pois tem forma sintática de termo singular, mas denota ambigualmente mais de um indivíduo.

<sup>3</sup> Lembrando que havia 9 planetas no sistema solar, mas há alguns anos Plutão deixou de ser considerado planeta e, portanto, hoje só há 8.

<sup>4</sup> Desconsiderando-se aqui qualquer sentido especial ou cultural de existência.

<sup>5</sup> Lembrando que não há divisão por zero.

<sup>6</sup> Como tanto  $2 \times 2 = 4$  quanto  $-2 \times -2 = 4$ , então  $\sqrt{4}$  denota ambigualmente tanto 2 quanto -2.

até há poucos anos, mas hoje seria. Por outro lado, se estas sentenças não são erros linguísticos, como todas elas são declarações, sentenças que afirmam algo, então sobre todas elas cabe julgarmos se são verdadeiras ou falsas. Mas como fazemos isso? Se, por exemplo, considerarmos falsa a primeira sentença – ‘*O atual rei da França é careca*’, então, logicamente, a sua suposta negação, a sentença ‘*O atual rei da França não é careca*’, deve ser verdadeira. Mas qual o fundamento para considerarmos verdadeira ou falsa qualquer destas sentenças, já que não há nenhum atual rei da França ou nono planeta do sistema solar? Se sentenças declarativas com termos indefinidos não são erros linguísticos então, sendo declarações, é preciso que haja algum critério de verdade que se aplique a elas. Como definir este critério? Qual seria o seu fundamento?

Além disso, as duas últimas sentenças da lista acima atestam que este não é um problema apenas da linguagem ordinária, mas ocorre também na matemática. Elas são verdadeiras, falsas ou simplesmente estão matematicamente mal escritas, e por isso não se configuram como proposições? Apesar de não haver um tratamento matemático sistematizado para questões deste tipo, há, sim, conforme veremos mais adiante, um conjunto de regras convencionais tradicionais, amplamente aceitas, que costumam ser empregadas para lidar com termos indefinidos na matemática.

O problema de sentenças contendo termos singulares indefinidos já é bastante conhecido e estudado pela tradição analítica da filosofia. São famosas as abordagens divergentes de Gottlob Frege e Bertrand Russell a esta questão. Nosso objetivo neste artigo é apresentar um tratamento linguístico formal para os termos singulares indefinidos de tal modo que seja possível aplicar as regras da convenção matemática também a expressões da linguagem comum. Ao fazer isso, veremos que o tratamento matemático da questão coincide com a abordagem de Russell ampliada por considerações de Quine. Utilizaremos este fato como fundamento de um argumento em favor da abordagem de Russell relativamente à de Frege, ao mostrarmos que a tradição matemática dá suporte a Russell. Para além desta contribuição para o debate histórico, acreditamos que a reformulação em termos funcionais das descrições definidas e nomes próprios que apresentaremos aqui ajuda a esclarecer os princípios que fundamentam a posição Russell–Quine e a mostrar que são estes mesmos princípios que também fundamentam a posição da tradição matemática.

Nossos passos serão, então, os seguintes: em primeiro lugar apresentaremos de modo bastante resumido as abordagens de Frege e Russell do problema linguístico dos termos singulares indefinidos e ampliaremos a abordagem de Russell com as considerações de Quine. Em seguida, apresentaremos o modo como a tradição matemática lida com o problema. Depois proporemos uma nova interpretação formal para nomes próprios e descrições definidas como termos funcionais. Então, veremos que as nossas redefinições funcionais nos habilitam a aplicarmos as regras convencionais da tradição matemática a sentenças da linguagem comum e que, ao fazermos isso, obtemos os mesmos resultados que a abordagem Russell–Quine obtém. Por fim, explicitaremos os fundamentos que regem tanto a abordagem Russell–Quine quanto a tradição matemática, concluindo nosso argumento. Como subproduto das considerações feitas, terminamos o artigo com um breve comentário que evidencia um aspecto de inadequação da lógica clássica para lidar com os problemas que os termos indefinidos impõem à matemática.

## A Abordagem de Frege

Em seu seminal artigo de 1892, *Sobre o Sentido e a Referência*, Frege apresenta a famosa distinção entre *sentido* e *referência* das expressões linguísticas:

É, pois, plausível pensar que exista, unido a um sinal (nome, combinação de palavras, letras), além daquilo por ele designado, que pode ser chamado de sua referência (*Bedeutung*), ainda o que eu gostaria de chamar de o sentido (*Sinn*) do sinal, onde está contido o modo de apresentação do objeto. (FREGE, 2009, 131)

Assim, as expressões ‘*Aristóteles*’, ‘*o Estagirita*’ e ‘*o fundador do Liceu*’, por exemplo, têm todas a mesma referência, Aristóteles, mas têm sentidos diferentes, pois são modos de apresentação diferentes do mesmo objeto/indivíduo.

Tanto partes de uma sentença têm sentido e referência, quanto a própria sentença completa. Os termos individuais, ou nomes próprios, terão como referência o objeto nomeado e como sentido o modo de apresentação do objeto. Mas qual o sentido e a referência de uma sentença completa? Frege chamou de *pensamento* (*Gedanke*) o sentido de uma sentença completa (FREGE, 2009, 137) e de *valor de verdade* a sua referência (FREGE, 2009, 139). E entre os valores de verdade distinguia apenas duas possibilidades: *o verdadeiro* e *o falso*. Dessa forma, quaisquer sentenças verdadeiras, tais como ‘*Aristóteles foi discípulo de Platão*’ e ‘*A água ferve a cem graus célsius ao nível do mar*’ têm a mesma referência: o verdadeiro. Elas são distintas apenas em seus sentidos, ou seja, nos pensamentos que exprimem.

Uma discussão mais aprofundada sobre a estranheza em considerar valores de verdade como referência de sentenças ou sobre o que vem a ser exatamente o sentido (modo de apresentação e pensamento) e qual o seu fundamento ontológico, está além dos nossos interesses específicos. Para os nossos propósitos é suficiente notarmos que a referência de uma expressão é aquilo (a coisa) de que se está falando quando se usa tal expressão, e que por isso, expressões como ‘*o atual rei da França*’ não têm referência. Já o sentido de uma expressão liga-se ao que normalmente chamamos de significado. É aquilo que falantes e ouvintes entendem pela expressão e que os habilita a identificar sua referência (MENDELSON, 2005, XV). Ou ainda, o sentido “é o que é comunicado ou carregado pela expressão, a informação que ela contém.” (MENDELSON, 2005, 35)<sup>7</sup>

Para Frege, tanto o sentido quanto a referência das sentenças completas são obtidos por composição dos sentidos e referências de suas partes. Tal constatação passou a ser conhecida como princípio da *composicionalidade* do sentido e da referência (MENDELSON, 2005, 11 e 37). Frege não apresenta explicitamente este princípio em seu texto, mas ele pode ser inferido de seus escritos principalmente pelo uso de um outro princípio que pressupõe logicamente a composicionalidade. É o princípio que Carnap (1947, 122) chamou de *substitutibilidade*, que afirma que a substituição de partes de uma sentença por outras que tenham a mesma referência (ou sentido) não afeta a referência (ou sentido) da sentença completa. Os dois trechos abaixo são exemplos que atestam a adesão de Frege aos princípios da substitutibilidade e composicionalidade tanto para o sentido quanto para a referência das sentenças.

Se nossa suposição é correta, de que a referência de uma sentença é seu valor de verdade, então este tem de permanecer inalterado, se uma parte da sentença for substituída por

<sup>7</sup> A teoria de Frege sobre o sentido e a referência, base de seu tratamento aos termos indefinidos, além de ter muitos detalhes, suscitou toda uma literatura secundária com críticas, complementos e desenvolvimentos, dentre os quais, alguns dos mais influentes são: (RUSSELL, 1905), (CHURCH, 1996), (CARNAP, 1947), (KAPLAN, 1979), (DUMMETT, 1993), (MENDELSON, 2005).

uma expressão que tenha a mesma referência, ainda que sentido diverso. (FREGE, 2009, 140)

Se tudo quanto importa fosse apenas o sentido da sentença, fosse apenas o pensamento, então seria desnecessário preocupar-se com a referência de uma parte da sentença; pois para o sentido da sentença somente importa o sentido desta parte. (FREGE, 2009, 138)

Mas se a referência de uma sentença completa, seu valor de verdade, é obtida por uma composição das referências de suas partes, o que ocorre com a referência da sentença quando alguma de suas partes for um termo indefinido sem referência ou com referência ambígua? Frege responde a esta pergunta afirmando que a falta ou ambiguidade da referência de algum de seus componentes faz com que a sentença resultante, ela própria, não tenha referência (FREGE, 2009, 147). Então, em princípio, para Frege, as sentenças com termos singulares indefinidos que vimos acima não seriam nem verdadeiras nem falsas.

Chamaremos a esta concepção de Frege de que as sentenças contendo termos singulares indefinidos não são nem verdadeiras nem falsas de *Teoria Frege–Strawson*. Frege trata esta questão como uma falha das linguagens ordinárias e defende que em uma linguagem logicamente perfeita (a sua conceitografia) não deve ser possível nem introduzir nomes próprios que não tenham referência, nem que qualquer expressão gramaticalmente correta “construída como um nome próprio” careça de referência ou tenha referência ambígua (FREGE, 2009, 147). Estes preceitos de Frege vingaram na lógica de predicados clássica, onde, para garantir que todos os termos individuais tenham referência, exige-se, em todos os modelos, que as constantes individuais (os nomes) tenham referência definida e que os símbolos de função sejam interpretados por funções totais. Como consequência disso, não existem termos indefinidos na lógica clássica e qualquer modelo atribui valor de verdade a todas as sentenças fechadas.

Mas ainda que proibidos na lógica clássica, os termos indefinidos ocorrem na matemática, e Frege era tanto consciente deste fato, quanto acreditava na necessidade de dar-lhe um tratamento, de corrigir esta “falha”. Ele propõe duas maneiras alternativas de corrigir este problema no contexto da matemática. Uma que ele sugere no próprio artigo *Sobre o Sentido e a Referência*, que chamaremos *Teoria Frege–Carnap*, e a outra que ele aponta no §11 das suas *Leis Básicas da Aritmética*, que será denominada de *Teoria Frege–Grundgesetze*. Estes três nomes para as divergências na abordagem de Frege: *teoria Frege–Strawson*, *teoria Frege–Carnap* e *teoria Frege–Grundgesetze* foram propostos por (KAPLAN, 1972) e adotados por (PELLETIER; LINSKY, 2009).

A correção que Frege propõe em *Sobre o Sentido e a Referência*, a teoria Frege–Carnap, consiste em convencionar uma atribuição artificial de referência a qualquer termo indefinido que ocorra no contexto da matemática:

Considero igualmente oportuno se precaver contra os nomes próprios aparentes carentes de toda referência. A história da matemática narra erros que se originaram dessa maneira (FREGE, 2009, 147). [...] De acordo com as observações acima, uma tal expressão deve sempre ter assegurada uma referência por meio de uma convenção especial, por exemplo de que sua referência será o número 0 se nenhum objeto, ou mais de um, cai sob o conceito (FREGE, 2009, 147 – nota 58).

A correção proposta nas *Leis Básicas da Aritmética*, teoria Frege–Grundgesetze, evidentemente restrita ao contexto da matemática, consiste, por sua vez, em uma convenção alternativa, um pouco mais elaborada, de atribuição artificial de referência. No §11 Frege introduz uma

função que ele denomina de *substituto para o artigo definido* que, basicamente, atua como um desambiguador artificial para expressões do tipo “o  $x$  tal que  $\varphi(x)$ ”.<sup>8</sup> Quando há um único valor possível de  $x$  para a expressão “o  $x$  tal que  $\varphi(x)$ ”, como por exemplo, “o  $x$  tal que  $x + 3 = 5$ ” ou seja, “o número que quando acrescido de 3 é igual a 5”, a função *substituto para o artigo definido* retorna este valor de  $x$ , que no caso é 2. Quando há mais de um valor possível de  $x$  para a expressão “o  $x$  tal que  $\varphi(x)$ ”, como por exemplo, “o número que multiplicado por si mesmo é igual a 4”, ou seja, “o  $x$  tal que  $x^2 = 4$ ”, a função retorna o conjunto dos valores que satisfazem a expressão, que neste caso é  $\{-2, 2\}$ . Note que mesmo havendo mais de um valor possível para  $x$  neste caso, ao retornar o conjunto destes valores, a função *substituto para o artigo definido* está retornando um único objeto, o conjunto de valores<sup>9</sup> e, portanto, está desambiguando a expressão. Por fim, quando nenhum valor de  $x$  satisfaz “o  $x$  tal que  $\varphi(x)$ ”, como em “o número que multiplicado por 0 é igual a 1”, ou seja, “o  $x$  tal que  $x \cdot 0 = 1$ ”, a função retorna o conjunto vazio. (FREGE, 1964, 49–50)

Há muita controvérsia na literatura sobre qual é, de fato, a abordagem que representa a real posição de Frege sobre sentenças com termos indefinidos. Tanto que as referências a Strawson e Carnap nos nomes propostos por Kaplan para as diferentes versões das abordagens de Frege refletem as divergências interpretativas destes autores sobre a posição de Frege que podemos ver em (STRAWSON, 1950) e (CARNAP, 1947).

A estas três teorias poderíamos ainda acrescentar uma quarta, que nem Kaplan nem Pelletier mencionam, mas a qual poderíamos chamar de *teoria Frege–Begriffsschrift*, que corresponde à proposta de reforma da linguagem que ele impôs à conceitografia, e que foi adotada pela lógica clássica de primeira ordem, que simplesmente proíbe a ocorrência de termos indefinidos.

Eu prefiro adotar a interpretação de Strawson, que sustenta que a abordagem principal de Frege sobre o assunto defende que, como consequência do princípio da composicionalidade, sentenças com termos indefinidos não são nem verdadeiras nem falsas. Esta parece ser, pelo menos, a abordagem de Frege com relação à linguagem natural. Há, inclusive, bastante suporte para esta posição em *Sobre o sentido e a referência* (FREGE, 2009, 147). Frege, no entanto, entende esta característica da linguagem natural como um problema, uma falha e suas outras abordagens podem, por isso, ser interpretadas como as suas tentativas de corrigir este problema nos contextos mais restritos da conceitografia e da matemática.

Podemos resumir a abordagem de Frege na seguinte tabela:

Sentença	Valor de Verdade
<i>O Atual rei da França é careca</i>	I
<i>Papai Noel não existe.</i>	I
$\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$	V

Repare que como as duas primeiras sentenças são da linguagem natural, então aplicamos a abordagem Frege–Strawson, que afirma que sentenças com termos indefinidos têm referência indefinida, ou seja, não têm valor de verdade. Usamos, na tabela, a letra ‘I’ de ‘*valor Indefinido*’ para indicar este fato. Por outro lado, a terceira sentença é uma afirmação matemática. Neste

<sup>8</sup>  $\varphi(x)$  é uma fórmula sentencial com uma variável livre. Então, a expressão “o  $x$  tal que  $\varphi(x)$ ” deveria ter como referência o único indivíduo  $x$  que torna a sentença  $\varphi(x)$  verdadeira. Acontece que dependendo de qual é a expressão  $\varphi(x)$ , pode ou não haver  $x$  que a torne verdadeira, ou haver mais de um. Nestes casos a expressão “o  $x$  tal que  $\varphi(x)$ ” é um termo singular indefinido e precisa ser desambiguada.

<sup>9</sup> *Percurso de valores* na nomenclatura de Frege

caso tanto a abordagem Frege–Carnap quanto a abordagem Frege–Grundgesetze consideram verdadeira a sentença, pois seja qual for a referência atribuída artificialmente por convenção ao termo indefinido  $\frac{1}{0}$ , esta referência é idêntica a si própria.

Voltaremos outras vezes a esta tabela, conforme a formos complementando com os dados das outras abordagens que apresentaremos. No entanto, já é digno de estranhamento o tratamento de Frege às duas últimas sentenças. A segunda indica que declarações de não-existência supostamente verdadeiras são indefinidas para Frege, e a terceira atribui verdade a uma proposição tradicionalmente considerada falsa.

## A Abordagem de Russell

Bertrand Russell, no famoso artigo *On Denoting*, desenvolve a sua *teoria das descrições definidas* com o objetivo de corrigir determinados problemas que ele via nas abordagens até então conhecidas de (MEINONG, 1981) (e seus seguidores como Mally e Ameseder) e (FREGE, 2009). (RUSSELL, 1905, 480)

Russell apresenta a sua abordagem distinguindo a proposição que uma sentença representa de sua expressão verbal. Segundo ele, as descrições definidas não são constituintes legítimas das proposições, mas apenas das expressões verbais em que ocorrem. Deste modo ele propõe a sua teoria como um conjunto de regras de paráfrase que dão a correta interpretação proposicional das sentenças cujas expressões verbais contêm descrições definidas (RUSSELL, 1905, 483). Ele fundamenta esta abordagem afirmando que os problemas com as teorias de Meinong e Frege originam-se, justamente, no tratamento ingênuo que ambos dão às frases denotativas e em especial às descrições definidas ao considerá-las componentes legítimas das proposições, como se fossem nomes.

Não desenvolverei em detalhes as críticas de Russell a Frege e Meinong, nem comentarei sobre a sua pertinência. Estes assuntos têm sido amplamente debatidos em vasta e longa bibliografia, da qual podemos citar (SEARLE, 1958), (BLACKBURN; CODE, 1978) e (SMITH, 1985). Apenas como uma rápida indicação, podemos dizer que as críticas de Russell a Meinong relacionam-se às consequências lógicas da teoria deste. Segundo Russell, ao considerar qualquer frase denotativa gramaticalmente correta como representativa de um objeto, a teoria de Meinong admite objetos que violam a lei da contradição. Estes objetos são justamente aqueles representados por termos indefinidos sem referência, ou seja, frases denotativas que não denotam, pois ‘*o atual rei da França*’, que não existe, também existiria, segundo Meinong, como referência obrigatória desta frase denotativa. (RUSSELL, 1905, 484)

Quanto a suas críticas a Frege, Russell afirma que a distinção entre *sentido e referência*, de Frege, que ele chama de *significado e denotação*, evita as contradições acima ao defender que um termo indefinido como ‘*o atual rei da França*’ apesar de ter sentido, não tem referência. No entanto, Russell não aceita o princípio da composicionalidade do sentido defendido por Frege. Ou seja, ele discorda que o significado de uma proposição em que ocorre uma frase denotativa seja uma composição do significado de suas partes. Segundo Russell, quando digo ‘*O atual rei da França é careca*’, não estou predicando sobre o significado de ‘*o atual rei da França*’, mas sobre o indivíduo denotado por esta expressão. Para Russell, se trato a frase denotativa ‘*o atual rei da França*’ como um nome, como o faz Frege, o significado da proposição expressa por ‘*O atual rei da França é careca*’ dependeria da própria denotação da expressão ‘*o atual rei da França*’. Como tal denotação não existe, a proposição ‘*O Atual rei da França é careca*’ seria sem sentido. Mas ela não é sem sentido (RUSSELL, 1905, 484). É por isso que Russell

afirma que não devemos tratar as expressões verbais das descrições definidas como constituintes legítimas de proposições, tal qual o fazemos com os nomes, mas temos sim que parafrasear tais expressões de modo a evitar a armadilha em que Frege caiu.

Outros aspectos da crítica de Russell a Frege dizem respeito à artificialidade do modo como este tentou resolver o problema, convencionando arbitrariamente uma denotação para os termos indefinidos (RUSSELL, 1905, 485) e à dificuldade em defender a diferença entre os conceitos de sentido (significado) e referência (denotação) que, segundo Russell, mediante a necessidade de relacionarem-se um com o outro, acabam por colapsarem em um único e indistinto conceito. (RUSSELL, 1905, 487)

Em termos gerais, a teoria de Russell defende que as descrições definidas devem ser parafraseadas por uma afirmação da *existência* e da *unicidade* do objeto descrito. Assim, quando afirmo que ‘*O atual rei da França é careca*’, estou, para Russell, dizendo que existe um único atual rei da França e que ele é careca. Se simbolizarmos por  $Careca(x)$  e  $AtuReiFra(y)$  os predicados ‘*ser careca*’ e ‘*ser o atual rei da França*’, respectivamente, então uma versão na linguagem da lógica de primeira ordem da interpretação de Russell para a proposição expressa pela sentença ‘*O atual rei da França é careca*’ seria:

$$\exists x (AtuReiFra(x) \wedge \forall y (AtuReiFra(y) \rightarrow x = y) \wedge Careca(x))$$

O modo como Russell apresenta esta simples teoria interpretativa é um tanto tortuoso, mas em 1905, antes porém dos *Principia Mathematica*, e antes do estabelecimento de uma convenção de formalização e interpretação para a linguagem da lógica, o modo tortuoso da apresentação de Russell é perfeitamente justificável.

Um primeiro fato a se notar é que, se considerarmos a tradução em linguagem de primeira ordem como uma representação da proposição vinculada à expressão verbal da sentença em linguagem natural, não encontraremos nenhum componente isolável da proposição formalizada que seja a tradução direta de uma descrição definida. Ao invés disso, a presença de uma descrição definida na expressão verbal da sentença indica uma maneira de produzir a proposição, maneira esta que por um lado não exige a existência da entidade supostamente referida pela descrição para que a proposição tenha significado e, por outro lado, envolve a afirmação da existência e da unicidade desta suposta entidade. Este engenhoso expediente habilita Russell a admitir termos indefinidos nas expressões verbais das sentenças sem, no entanto, se comprometer com a existência de entidades abstratas estranhas, que seriam as referências destes termos. Como resultado, não há na proposição resultante de sua interpretação qualquer menção a uma entidade que existe e não existe, como em Meinong, ou que tenha sentido mas não tenha referência, como em Frege. Para Russell, a proposição expressa pela sentença ‘*O atual rei da França é careca*’ simplesmente é falsa. Podemos ver facilmente isto tanto notando que nenhuma substituição de  $x$  por qualquer indivíduo tornará verdadeira a fórmula  $AtuReiFra(x)$ , ou, de modo ainda mais simples, notando que a paráfrase de Russell é equivalente a afirmação da conjunção entre: (1) ‘*Existe um único indivíduo que é o atual rei da França*’ e (2) ‘*Este indivíduo, se existir, é careca*’. Como (1) é falsa, a conjunção de (1) com (2) também é falsa.

A interpretação de Russell também se sai bem do embaraço da negação de uma sentença contendo termo indefinido. Tanto a sentença ‘*O atual rei da França é careca*’ quanto sua suposta negação, ‘*O atual rei da França não é careca*’ são consistentemente falsas para Russell. Isto porque a paráfrase de Russell faz com que a segunda proposição não seja a negação da primeira, mas corresponda a conjunção de (1) ‘*Existe um único indivíduo que é o atual rei da*

*França*’ e (3) ‘*Este indivíduo, se existir, não é careca*’. Como já vimos, (1) é falsa. Logo, a sentença toda também é falsa. Sua tradução na linguagem de primeira ordem seria:

$$\exists x (\text{AtuReiFra}(x) \wedge \forall y (\text{AtuReiFra}(y) \rightarrow x = y) \wedge \neg \text{Careca}(x))$$

## O Complemento de Quine à Abordagem de Russell

A teoria de Russell responde bem aos problemas que ele próprio aponta com relação a descrições impróprias (descrições definidas sem referência ou com referência ambígua), mas este mesmo tipo de problema pode ocorrer com nomes impróprios. Qual a interpretação semântica da sentença ‘*Papai Noel mora no polo norte*’? Não temos aqui uma descrição imprópria, mas um nome impróprio. Um nome para o qual não há indivíduo que seja a sua referência. Meinong e Frege tratam, cada um à sua maneira, esta sentença, mas a teoria da denotação de Russell, por lidar exclusivamente com descrições, nada nos diz sobre nomes impróprios e é, por isso, incompleta.<sup>10</sup> No entanto, se trocarmos o nome ‘*Papai Noel*’ por uma descrição sua, tal como ‘*o velhinho de barba branca e roupa vermelha que entrega presentes na noite de natal*’, podemos aplicar a abordagem de Russell e constatar que a sentença resultante, ‘*O velhinho de barba branca e roupa vermelha que entrega presentes na noite de natal mora no polo norte*’, que é semanticamente equivalente à anterior, é falsa. Seria, portanto, compatível com a teoria de Russell tratar os nomes impróprios de modo assemelhado ao tratamento que ele dá às descrições impróprias. É exatamente isto que (QUINE, 1963) propõe.

Em seu famoso artigo ‘*Sobre o que Há*’, Quine está preocupado em assegurar a possibilidade de se debater sobre ontologia. Para isso dispõe-se a identificar de que forma os discursos se comprometem ontologicamente, ou seja, quando se pode afirmar que uma entidade ontológica específica é subsumida por um determinado discurso. Ele procura se contrapor a um antigo e forte argumento que assume que o uso de um nome torna o discurso comprometido ontologicamente com a suposta entidade nomeada. Este compromisso tornaria inviável qualquer debate ontológico, pois tornaria falsa qualquer afirmação de não existência feita com uso de nomes. Se a interpretação semântica do nome ‘*Deus*’, por exemplo, envolvesse de alguma maneira a entidade nomeada, então a afirmação de que ‘*Deus não existe*’ seria contraditória, pois o uso do nome ‘*Deus*’ nos comprometeria com a existência da entidade que justamente está-se afirmando que não existe.

A teoria de Meinong, segundo Russell, cai exatamente neste tipo de contradição. Já a de Frege, na versão Frege–Strawson que lida com sentenças na linguagem natural, apesar de não se contradizer, não consegue valorar afirmações de não existência supostamente verdadeiras, conforme pudemos notar na tabela do final da seção 2, justamente pela impossibilidade de compor a referência da sentença (seu valor de verdade) quando algum de seus termos não tem referência (o termo referente à entidade que não existe).

Para evitar este problema Quine propõe que os nomes sejam tratados como predicados e que em todas as sentenças em que ocorram, eles sejam substituídos por uma descrição definida envolvendo este predicado. Por fim, ele propõe que estas descrições definidas que substituem os nomes sejam interpretadas semanticamente segundo a teoria de Russell. Assim, o nome ‘*Papai Noel*’, por exemplo, dá origem ao predicado ‘*ser Papai Noel*’ e o seu uso em qualquer sentença

<sup>10</sup> Russell demonstrou, posteriormente, estar ciente deste problema que os nomes impróprios impõem. Tanto que em (RUSSELL, 1985) ele propõe uma radical teoria de eliminação dos nomes.

dá origem à descrição definida ‘*o indivíduo/objeto que é Papai Noel*’. Então, a sentença ‘*Papai Noel mora no polo norte*’ deve ser parafraseada para ‘*O indivíduo que é Papai Noel mora no polo norte*’. E esta sentença, por sua vez, deve ser interpretada semanticamente segundo a teoria de Russell, ou seja, deve ser interpretada como a afirmação de que existe um único indivíduo que é Papai Noel e ele mora no polo norte. Como não há nenhum indivíduo/objeto que satisfaça o predicado ‘*ser Papai Noel*’, esta sentença é falsa. Uma tradução sua em linguagem de primeira ordem seria:

$$\exists x (\text{EhPapaiNoel}(x) \wedge \forall y (\text{EhPapaiNoel}(y) \rightarrow x = y) \wedge \text{MoraPoloNorte}(x))$$

Afirmações de não existência que envolvem nomes, que eram problemáticas na abordagem de Frege, agora são adequadamente tratadas. A sentença ‘*Papai Noel não existe*’, por exemplo, é parafraseada por ‘*O indivíduo que é Papai Noel não existe*’. Sua tradução em linguagem de primeira ordem,  $\neg \exists x \text{EhPapaiNoel}(x)$ , é uma sentença verdadeira, já que nenhum  $x$  satisfaz o predicado  $\text{EhPapaiNoel}(x)$ .

Apesar de ter resolvido alguns problemas que a abordagem de Frege enfrentava, há na literatura muitas críticas a esta interpretação descritivista dos nomes. Como anteriormente, não vou detalhar a questão, presente em vasta bibliografia, da qual podemos citar (ALSTON, 1958), (LEWIS, 1973), (STRAWSON, 1961), (KRIPKE, 1980), (CHATEAUBRIAND, 2003). Apenas de modo muito breve indico que a abordagem de Quine se baseia em um tratamento semântico descritivista dos nomes. Segundo esta abordagem, o que nos habilita a entender o uso de um nome, ou seja, a identificar a sua referência, são as descrições que temos do objeto nomeado. Assim, o uso do nome ‘*Papai Noel*’ só é possível porque há descrições disponíveis de Papai Noel, tal como ‘*o velhinho de barba branca e roupa vermelha que entrega presentes na noite de natal*’. São estas descrições que tornam inteligível o uso do nome, ou, dito de outra forma, que nos habilitam a identificar a sua referência. Um primeiro tipo de crítica a esta abordagem aponta uma suposta artificialidade na transformação de nomes em predicados. Um outro tipo de crítica, mais sério, foi primeiramente feita por Kripke (1980), que apresentou algumas situações de uso da linguagem que envolvem afirmações condicionais contrafactuais, em que tratar nomes como descrições leva a problemas insolúveis.

Deixando de lado este debate, podemos concluir que estas considerações de Quine complementam a teoria da denotação de Russell, que agora trata tanto das descrições impróprias quanto dos nomes impróprios. Podemos, portanto, ampliar nossa tabela de resumo acrescentando a avaliação que a abordagem Russell–Quine dá às sentenças ali presentes.

Sentença	Frege	Russell–Quine
<i>O Atual rei da França é careca</i>	I	F
<i>Papai Noel não existe.</i>	I	V
$\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$	V	F

Para entender por que a abordagem Russell–Quine avalia como falsa a terceira sentença,  $\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$ , basta notar que uma paráfrase sua em português seria ‘*O resultado da divisão de um por zero é idêntico a si próprio*’, que, segundo a interpretação de Russell, afirma a conjunção (1) existe um único resultado da divisão de um por zero e (2) se ele existir é idêntico a si próprio. Como (1) é falsa, a sentença toda, conjunção de (1) com (2), também é falsa. Vale notar também a completa divergência entre a abordagem de Frege e a de Russell–Quine com relação às três sentenças da tabela.

## A Abordagem da Tradição Matemática

Termos singulares indefinidos, que não denotam, tais como  $\frac{1}{0}$ , ou que denotam ambigualmente, tais como  $\sqrt{4}$ , são muito comuns na prática matemática. Uma das principais fontes de indefinição na matemática são os termos que representam a aplicação de uma função a um argumento para o qual ela não está definida.

O domínio de definição  $D_f$  de uma função  $f$  corresponde ao conjunto de valores para os quais ela está definida. Já o seu domínio de aplicação  $D_f^*$  corresponde ao conjunto de valores para os quais a função  $f$  pode ser aplicada em um dado contexto. Quando  $D_f = D_f^*$ ,  $f$  é dita uma *função total* e nenhuma de suas aplicações será um termo indefinido. No entanto, quando  $D_f \subset D_f^*$ ,  $f$  é dita uma *função parcial* e a aplicação  $f(a)$  será um termo indefinido se  $a \in D_f^*$  e  $a \notin D_f$ . Assim, se considerarmos por exemplo a função  $\sqrt{\phantom{x}} : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  (raiz quadrada com o conjunto dos números reais como domínio de aplicação e contradomínio),  $\sqrt{\phantom{x}}$  será uma função parcial pois seu domínio de aplicação é o conjunto dos números reais  $D_f^* = \mathfrak{R}$ , mas, restrita ao contradomínio dos reais, o seu domínio de definição são os números reais não negativos  $D_f = \{x \in \mathfrak{R} / x \geq 0\}$ , uma vez que não existe nenhum número real que multiplicado por si mesmo tenha como resultado um número negativo. Neste contexto, a expressão  $\sqrt{-2}$  é um termo singular indefinido, pois teria como denotação um número que não existe. (FARMER, 2004, 475-476)

Poder-se-ia pensar que expressões como  $\frac{1}{0}$  e  $\sqrt{-2}$  são simplesmente erros, expressões mal escritas que ocorrem apenas nos cadernos de notas de estudantes, e que portanto, os termos indefinidos poderiam ser eliminados da boa prática matemática. Mas a situação não é tão simples assim. Considere, por exemplo, a seguinte expressão, também sugerida por Farmer (2004, 476):

$$\forall x \in \mathfrak{R} (x \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = x)$$

Ela afirma que para todos os números  $x$  pertencentes ao conjunto dos números reais, se  $x$  for maior ou igual a 0 então o quadrado da raiz quadrada de  $x$  é igual a  $x$ . Nenhum matemático reclamaria que esta sentença não faz sentido, que ela está mal escrita ou envolve algum tipo de erro. Ela é uma sentença perfeitamente aceitável e verdadeira. No entanto, quando um lógico se depara com tal sentença e procura atribuir-lhe valor de verdade de acordo com a moderna teoria da satisfação de Tarski (1944), as coisas deixam de ser tão simples, pois para que uma sentença quantificada universalmente seja verdadeira, é preciso que todas as suas instâncias sejam verdadeiras, inclusive, neste caso, aquelas em que  $x$  é um número real negativo. Então a verdade incontestável de  $\forall x \in \mathfrak{R} (x \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = x)$  depende de nossa capacidade de avaliar e considerar verdadeiras sentenças como  $(-2 \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{-2})^2 = -2)$ , que envolvem o termo singular indefinido  $\sqrt{-2}$ .

Este fato exemplifica que os termos singulares indefinidos ocorrem inevitavelmente na prática matemática e que não é possível eliminá-los simplesmente proibindo-os. Exemplifica também que a lógica clássica que, seguindo as prescrições de Frege, banuiu de suas considerações os termos singulares indefinidos, ao exigir que todos os termos singulares tenham referência, não está totalmente adequada para formalizar todos os aspectos da prática matemática.

Farmer (2004), interessado em aperfeiçoar técnicas de formalização computacional da matemática, reconheceu o problema que os termos singulares indefinidos representam para este projeto, uma vez que tanto a lógica clássica de primeira ordem quanto a teoria simples dos tipos não admitem tais termos. Com vistas a propor um tratamento formal adequado ao modo como a tradição matemática tem lidado com os termos singulares indefinidos, Farmer compilou um

conjunto de 3 princípios que sintetizam este tratamento. A lista abaixo, de 5 princípios, é apenas uma adaptação dos princípios compilados por Farmer à linguagem um tanto mais simples que temos adotado.

### Princípios da Abordagem Matemática Tradicional aos Termos Singulares Indefinidos

1. Variáveis e constantes (termos atômicos) são sempre definidos. Sempre denotam.
2. Uma aplicação de função  $f(a)$  pode ser indefinida, não denotar, se  $a$  não pertencer ao domínio de definição de  $f$  ( $a \notin D_f$ ). Neste caso  $f$  não tem valor para o argumento  $a$ .
3. Uma aplicação  $f(a)$  também pode ser indefinida se  $f$  relaciona mais de um valor possível ao argumento  $a$ . Neste caso  $f$  não é uma função, mas uma relação, não sendo, pois, um termo singular. Portanto, ao ser tomado como termo singular, sua denotação fica indefinida.
4. Fórmulas são sempre verdadeiras ou falsas, sempre definidas.
5. Uma fórmula atômica  $P(t)$  é considerada **falsa** se o termo  $t$  for indefinido.

Se, por exemplo, aplicarmos estes princípios à sentença  $\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$ , vemos que em ambos os lados da identidade há um termo singular indefinido,  $\frac{1}{0}$ , justamente porque ele representa a aplicação de uma função, a divisão  $div(x,y)$ , a um par de argumentos  $(1,0)$  para o qual ela não está definida.<sup>11</sup> Portanto, de acordo com o princípio 2,  $\frac{1}{0}$  é um termo indefinido. Logo, de acordo com o princípio 5, como há termo singular indefinido na fórmula  $\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$ , então ela é falsa segundo a abordagem tradicional.

Podemos, mais uma vez, ampliar nossa tabela de resumo das abordagens para incluir o tratamento tradicional da matemática.

Sentença	Frege	Russell–Quine	T. Matemática
<i>O Atual rei da França é careca</i>	I	F	×
<i>Papai Noel não existe.</i>	I	V	×
$\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$	V	F	F

É digno de nota que, na única sentença para a qual a abordagem tradicional da matemática é pertinente, a terceira, ela concorda com a teoria de Russell–Quine e discorda da de Frege.<sup>12</sup>

### A Abordagem Funcional

Pretendemos, nesta seção, propor uma nova interpretação semântica para as sentenças nas quais ocorrem nomes e descrições definidas, com o objetivo de poder ampliar para sentenças da linguagem comum a abordagem da tradição matemática para os termos singulares indefinidos.

<sup>11</sup> Seja  $div$  a função divisão tal que  $div(m,n) = \frac{m}{n}$ . Para perceber que  $\frac{1}{0}$  é termo indefinido basta notar que o par  $(1,0) \notin D_{div}$ .

<sup>12</sup> Cabe ainda notar que a marcação ‘I’ nas duas primeiras sentenças da coluna de Frege indica que a abordagem de Frege considera estas sentenças mas não atribui valor de verdade a elas, deixando-as indefinidas. Já a marcação ‘×’ nas duas primeiras colunas da abordagem da tradição matemática indica, por sua vez, que estas sentenças, por não serem matemáticas, não estão no escopo desta abordagem.

Um padrão semântico presente em todas as descrições definidas é que, conforme Frege já notara, todas elas podem ser reduzidas à forma ‘*o x tal que  $\varphi(x)$* ’, onde  $\varphi(x)$  representa uma propriedade expressa por um predicado ou fórmula. Além disso, em seus usos próprios, não problemáticos, para cada  $x$  existe um e apenas um indivíduo que satisfaz  $\varphi(x)$ .

No contexto da matemática, o caso mais fundamental de descrição definida se dá quando  $\varphi(x)$  é uma fórmula atômica que afirma a identidade entre uma função aplicada ao argumento  $x$  e um valor especificado  $c$ . Ou seja, um caso padrão de ‘*o x tal que  $\varphi(x)$* ’ é ‘*o x tal que  $f(x) = c$* ’. Por exemplo, a descrição definida ‘*o número cujo cubo é oito*’ é expressa na forma fregeana por ‘*o x tal que  $x^3 = 8$* ’. Neste caso,  $\varphi(x)$  é expressa pela identidade  $x^3 = 8$  que afirma que o valor da função cubo,  $f(x) = x^3$ , para o argumento  $x$ , é 8. Assim a expressão ‘*o x tal que  $x^3 = 8$* ’ equivale a ‘*o argumento para o qual a função cubo tem valor 8*’. Mas uma maneira matematicamente mais direta de indicar qual é o argumento  $x$  para o qual a aplicação  $f(x)$  tem a constante  $c$  como valor é através do conceito de função inversa ( $f^{-1}$ ). De acordo com a definição padrão,  $f^{-1}$  é a função inversa de  $f$  quando  $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$ . Se  $f$  usa o argumento  $x$  para denotar o valor  $y$ ,  $f^{-1}$  denota  $x$  usando como argumento o valor  $y$ . Assim, a descrição ‘*o argumento para o qual a função  $f$  tem valor  $c$* ’, ou seja, ‘*o x tal que  $f(x) = c$* ’ é equivalente a simplesmente  $f^{-1}(c)$ . Então, considerando que a função inversa da função cubo,  $f(x) = x^3$ , é a função raiz cúbica,  $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ , a maneira matematicamente mais direta de denotar ‘*o x tal que  $x^3 = 8$* ’ é dada simplesmente por ‘ $\sqrt[3]{8}$ ’.

Nossa proposta aqui é usar este caso padrão de equivalência entre uma descrição definida e a aplicação de uma função

$$f^{-1}(c) \quad \equiv \quad \text{‘o x tal que } f(x) = c\text{’}$$

como modelo paradigmático para interpretar, através de funções, todos os casos de descrições definidas.

Vejamos como alguns exemplos de descrições definidas tanto na matemática quanto em linguagem natural podem ser traduzidos para aplicações de função:<sup>13</sup>

- 1) ‘o autor de *Dom Casmurro*’  
→ *oautorde(domcasmurro)*
- 2) ‘o atual rei da França’  
→ *oatualreide(franca)*
- 3) ‘o número que multiplicado por 0 é 1’  
→ ‘o x tal que  $x \cdot 0 = 1$ ’ →  $\frac{1}{0}$
- 4) ‘o número cujo quadrado é 4’  
→ ‘o x tal que  $x^2 = 4$ ’ →  $\sqrt{4}$
- 5) ‘o elefante no guarda-roupa de Flammarion’  
→ *oelefanteem(oguardaroupade(flammarion))*

<sup>13</sup> Estamos, até aqui, adotando o padrão tradicional de notação de textos matemáticos semiformalizados, que consiste em usar fontes *itálicas* para variáveis, funções, predicados,... No entanto, quando escrevemos fórmulas na linguagem da lógica de primeira ordem, como os exemplos a seguir, estamos adotando um padrão mais adequado aos sistemas formais, no qual reservamos as fontes *itálicas* apenas para os símbolos de função. Para as variáveis e constantes individuais (nomes) usamos fontes sem serifa e apenas letras minúsculas, e para os símbolos de predicado usamos as mesmas fontes sem serifa, mas iniciando com letras Maiúsculas.

Nos exemplos (1) e (2) acima, a descrição definida pode ser traduzida diretamente para uma aplicação funcional. O termo ‘o autor de *Dom Casmurro*’ pode ser interpretado como a aplicação da função *oautorde* ao argumento *domcasmurro*. A função *oautorde* tem como domínio o conjunto de obras com autores individuais e como imagem o conjunto de pessoas que criaram estas obras. Assim,  $oautorde(\text{domcasmurro}) = machadodeassis$ ,  $oautorde(\text{jubiaba}) = jorgeamado$ , e assim por diante. Da mesma forma, ‘o atual rei da França’ pode ser interpretado como a aplicação da função *oatualreide* ao argumento *franca*. A função *oatualreide* tem como domínio o conjunto de países que são monarquias governadas por reis e como imagem o conjunto destes reis. O termo ‘o atual rei da França’ é indefinido, não denota, porque a França é uma república. Não tem rei. Na notação funcional esta situação pode ser descrita em termos matemáticos ao dizermos que o termo  $oatualreide(\text{franca})$  é indefinido porque o argumento *franca* não está no domínio de definição da função *oatualreide*. Ou seja,  $\text{franca} \notin D_{oatualreide}$ .

Em (3) e (4) temos novos exemplos do caso paradigmático que importamos da matemática discutido anteriormente, para o qual basta tomar a função inversa para obter a versão funcional da descrição definida. Nos dois exemplos temos termos singulares indefinidos. Em (3) porque o par  $(1,0)$  não pertence ao domínio de definição da função  $div(x,y) = \frac{x}{y}$ , uma vez que não existe divisão por zero. E em (4) temos um termo indefinido porque  $f(x) = \sqrt{x}$  não é uma função, já que tem mais de um valor para cada argumento, pois tanto 2 quanto  $-2$  são  $\sqrt{4}$ .

O exemplo (5) mostra que mesmo casos mais complexos da linguagem natural podem perfeitamente bem ser parafraseados por aplicações de função. O termo ‘o elefante no guarda-roupa de Flammarion’ pode ser interpretado por um termo funcional que envolve duas aplicações de função. Vejamos como. A referência do termo (5) é um certo elefante. Esta referência é dada através da especificação de um certo lugar onde este elefante está: o guarda-roupa de Flammarion. Então uma primeira aplicação funcional toma a função *oelefanteem*, que tem como domínio o conjunto de lugares em que há elefantes e como imagem o conjunto destes elefantes, e aplica esta função a um certo lugar específico: o guarda-roupa de Flammarion. Mas este lugar, por sua vez, é também apresentado descritivamente através da função *oguardaroupade*, que tem como domínio o conjunto de pessoas que possuem um só guarda-roupa e como imagem estes guarda-roupas. Assim, o lugar onde está o elefante, argumento da função *oelefanteem*, é dado pela aplicação da função *oguardaroupade* ao argumento *flammarion*, que é o nome de uma pessoa que supostamente tem um só guarda-roupa. Portanto podemos ver que a dupla aplicação de função  $oelefanteem(oguardaroupade(\text{flammarion}))$  interpreta adequadamente a descrição ‘o elefante no guarda-roupa de Flammarion’.

Não encontrei ainda nenhum exemplo de descrição definida que não pudesse ser interpretada por aplicações de função nos moldes dos exemplos acima. Este modo funcional de interpretá-las tem ainda a vantagem de que a convenção matemática estabelece a *existência* e a *unicidade* da referência de  $g(c)$  quando  $g$  é uma função total e  $c \in D_g$ . Deste modo, podemos classificar os casos impróprios, aqueles em que há falha na denotação, nas categorias que a própria matemática nos dá. Assim, se  $g(c)$  corresponde a uma descrição definida imprópria, um dos seguintes casos ocorre:

- a) Há mais de um valor possível para a aplicação  $g(c)$ . Ou seja,  $g$  não é uma função, mas uma relação.
- b)  $c \notin D_g$ . A função  $g$  não está definida para o argumento  $c$ , que não pertence ao seu domínio de definição.
- c)  $c$  é um termo indefinido. Ou seja, o nome  $c$ , ele próprio, não denota.

Esta lista é bastante conveniente, porque se qualquer termo indefinido enquadra-se em uma das três situações acima, então para propormos uma abordagem que trate de todos os casos impróprios possíveis, basta considerarmos estas três situações.

Uma vez que apresentamos uma interpretação funcional matematizada para as descrições definidas, nossa proposta é valeremo-nos desta matematização e utilizar o tratamento que a tradição dá aos termos indefinidos, resumidos nos cinco princípios apresentados na seção anterior, para lidar com os casos problemáticos de falha na referencialidade. Estes princípios já nos indicam o tratamento dos itens (a) e (b) da lista acima, pois eles se enquadram exatamente nos princípios 5.3 e 5.2 respectivamente. O item (c), no entanto, não tem similar na tradição matemática, pois de acordo com o princípio 5.1 todas as variáveis e constantes deveriam denotar. Este caso exigirá um tratamento específico, que faremos mais adiante. Antes, vejamos alguns exemplos de proposições construídas com as interpretações funcionais de descrições definidas.

- 1) ‘O autor de *Dom Casmurro* é negro’  
 $\rightarrow \text{EhNegro}(\text{oautorde}(\text{domcasmurro}))$
- 2) ‘O atual rei da França viajou para Madri’  
 $\rightarrow \text{ViajouPara}(\text{oatualreide}(\text{franca}), \text{madri})$
- 3) ‘O número que multiplicado por 0 é 1, é idêntico a si próprio’  
 $\rightarrow \frac{1}{0} = \frac{1}{0}$
- 4) ‘O número cujo quadrado é 4, é maior do que 0’  
 $\rightarrow \sqrt{4} > 0$
- 5) ‘O elefante no guarda-roupa de Flammarion está amarrotando sua camisa verde’  
 $\rightarrow \text{EstaAmarrotando}(\text{oelefanteem}(\text{oguardaroupade}(\text{fla})), \text{acamisaverdede}(\text{fla}))$
- 6) ‘Papai Noel mora no polo norte’  
 $\rightarrow \text{MoraPoloNorte}(\text{papainoel})$

Vamos avaliar com as ferramentas que temos até o momento as interpretações funcionais das seis sentenças da lista acima. A sentença (1) é um caso simples e não problemático. A descrição definida ‘o autor de *Dom Casmurro*’ é interpretada pela aplicação de função  $\text{oautorde}(\text{domcasmurro})$  que denota um indivíduo específico, Machado de Assis, para o qual o predicado  $\text{EhNegro}$  se aplica. Portanto a sentença é verdadeira. Na sentença (2) a aplicação de função  $\text{oatualreide}(\text{franca})$  é um termo indefinido de acordo com o princípio 5.2, pois  $\text{franca} \notin D_{\text{oatualreide}}$ . Assim, de acordo com o princípio 5.5 a sentença (2) é falsa. A sentença (3) também é falsa pelos mesmos motivos da (2), uma vez que nela ocorre o termo  $\frac{1}{0}$  que é indefinido, também de acordo com o princípio 5.2, porque o par  $(1,0) \notin D_{\text{div}}$ . Na sentença (4) o termo  $\sqrt{4}$  é indefinido, de acordo com o princípio 5.3, pois  $\sqrt{x}$  tem mais de um valor para o argumento 4. Então, também pelo princípio 5.5, a sentença (4) é falsa. A sentença (5) pode ser verdadeira ou falsa, dependendo do modelo que se tome. O mais provável é que ela seja falsa e que sua falsidade se justifique pelo fato de não haver nenhum elefante no guarda-roupa de Flammarion. Neste caso teríamos um termo indefinido de acordo com o princípio 5.2 já que  $\text{oguardaroupade}(\text{fla}) \notin D_{\text{oelefanteem}}$ . Por fim, ainda não temos condições de avaliar a sentença

(6) uma vez que ela envolve o uso de uma constante, *papainoel*, que, por não possuir denotação, é imprópria. Esta situação não está prevista nos princípios tradicionais da matemática, que exige que todas as constantes denotem.

Uma primeira solução possível para o problema imposto pela sentença (6) consiste, simplesmente, em adotar o tratamento predicativo que Quine dá aos nomes. Assim, o nome ‘*Papai Noel*’ seria substituído pela descrição ‘*o indivíduo que é Papai Noel*’ e a abordagem de Russell para esta descrição seria adotada. Então a sentença (6), ‘*Papai Noel mora no polo norte*’ seria interpretada exatamente da forma como a teoria Russell–Quine propõe:

$$\exists x(EhPapaiNoel(x) \wedge \forall y(EhPapaiNoel(y) \rightarrow x = y) \wedge MoraPoloNorte(x))$$

Mas esta solução nos parece insatisfatória, pois ela consiste em desistir de tratar o caso e adotar a abordagem Russell–Quine para o que não se conseguiu resolver. No lugar disso, vamos propor uma solução que tratará também os nomes como aplicações de função. Ou seja, vamos manter a consistência da abordagem, fazendo que tanto nomes quanto descrições definidas sejam tratados funcionalmente.

Propomos interpretar um nome como uma função identidade radicalmente parcial cujo domínio de definição ou é vazio, no caso de um nome impróprio, ou é um conjunto unitário, cujo único elemento é o objeto nomeado. Assim, o nome ‘*Jorge Amado*’, por exemplo, ao invés de ser interpretado pela constante *jorgeamado* é interpretado pela função identidade parcial *opropriojorgeamado*, cujo domínio é o conjunto unitário que tem Jorge Amado como o único elemento e, por ser uma função identidade, a imagem também é o próprio Jorge Amado. Então, quando o valor da variável  $x$  é Jorge Amado, a aplicação *opropriojorgeamado(x)* tem como valor (denota) o próprio Jorge Amado. Quando, por sua vez, o valor de  $x$  é distinto de Jorge Amado, então a aplicação *opropriojorgeamado(x)* é um termo singular indefinido, não denota, pois o argumento desta aplicação está fora do domínio de definição da função. No caso de um nome impróprio, que não denota, como ‘*Papai Noel*’, o domínio da função *opropriopapainoel* é vazio e portanto, todas as suas aplicações serão termos indefinidos. Ou seja, para qualquer valor de  $x$ , a aplicação *opropriopapainoel(x)* será um termo singular indefinido que não denota. Em resumo, dado um nome  $c$ , o único valor possível para a função *oproprioc* é o indivíduo que é  $c$ , e este valor só será atribuído quando a aplicação da função *oproprioc* tiver como argumento o indivíduo que é  $c$ .

Assim, na interpretação da sentença (6), no lugar do nome *papainoel* usamos a função parcial identidade *opropriopapainoel* e ficamos com algo como:

$$MoraPoloNorte(opropriopapainoel(x))$$

Como estamos agora introduzindo uma variável onde antes só havia constantes e funções, para podermos completar esta abordagem é preciso inserir esta variável no escopo de um quantificador. Afinal, a expressão acima não é uma sentença fechada, sobre a qual cabe julgar seu valor de verdade, mas é uma fórmula aberta cujo valor de verdade depende do valor de  $x$ . Mas quando simplesmente usamos um nome, sem mais esclarecimentos, este uso é compatível com a suposição da existência da entidade nomeada. Então é perfeitamente consistente completar a abordagem dos nomes como funções identidade parciais exigindo que as variáveis introduzidas nas substituições de nomes por aplicações de função estejam no escopo de um quantificador existencial. Assim, a completa interpretação da sentença (6), ‘*Papai Noel mora no polo norte*’ será:

$$\exists x \text{MoraPoloNorte}(\text{opropriopapainoel}(x))$$

Podemos agora aplicar os princípios da tradição matemática a esta interpretação da sentença (6). Como ‘Papai Noel’ é um nome impróprio, o domínio de definição da função *opropriopapainoel* será o conjunto vazio. Portanto, para todos os valores de  $x$  a aplicação de função *opropriopapainoel*( $x$ ) será, de acordo com o princípio 5.2, um termo impróprio, uma vez que se trata de aplicação de função a um argumento fora de seu domínio de definição. Assim, todas as instâncias de *MoraPoloNorte*(*opropriopapainoel*( $x$ )) para todos os valores de  $x$  serão, de acordo com o princípio 5.5, falsas. Portanto, a sentença completa,  $\exists x \text{MoraPoloNorte}(\text{opropriopapainoel}(x))$  também será falsa.

Vamos, como um outro exemplo, reavaliar a sentença (1), levando em consideração nossa nova interpretação para os nomes. A nova interpretação para a sentença (1), ‘O autor de *Dom Casmurro* é negro’, fica:

$$\exists x \text{EhNegro}(\text{oautorde}(\text{opropriodomcasmurro}(x)))$$

Como ‘*Dom Casmurro*’ é um nome próprio, com denotação, quando  $x$  denota este valor, a função *opropriodomcasmurro*( $x$ ) é definida e também denota este valor, ou seja, denota a própria obra ‘*Dom Casmurro*’. Então, para este valor de  $x$ , a aplicação de função *oautorde*(*opropriodomcasmurro*( $x$ )) denota Machado de Assis, que por sua vez satisfaz o predicado *EhNegro*. Portanto, como existe um valor de  $x$  que torna uma instância de *EhNegro*(*oautorde*(*opropriodomcasmurro*( $x$ ))) verdadeira, então a sentença (1) é, ela própria, verdadeira.

Podemos agora completar a tabela de resumo das abordagens aos termos indefinidos, incluindo esta nossa proposta de abordagem funcional.

Sentença	Frege	Russell–Quine	T. Matemática	A. Funcional
<i>O Atual rei da França é careca</i>	I	F	×	F
<i>Papai Noel não existe</i>	I	V	×	V
$\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$	V	F	F	F

Não é difícil perceber que esta abordagem funcional concorda perfeitamente com a abordagem Russell–Quine na avaliação de todas as sentenças, sejam elas da matemática ou da linguagem natural, bastando, para tanto, a análise de mais alguns exemplos. Para não nos alongarmos mais ainda, deixamos ao leitor que ainda não esteja convencido o ônus desta tarefa.

## Considerações Finais

Propusemos a abordagem funcional aos nomes e descrições definidas com o intuito de ampliar para sentenças da linguagem natural a maneira tradicional da matemática abordar termos singulares indefinidos. Sugerimos, inicialmente, uma interpretação das descrições definidas como aplicações de função, utilizando como modelo o caso mais padronizado de descrição definida no contexto da matemática. Em seguida estendemos a abordagem para interpretar de modo funcional também os nomes, uma vez que no contexto da linguagem natural, estes termos também podem ser impróprios e não denotarem. Foi esta interpretação matematizada de nomes e descrições definidas que viabilizou a extensão da utilização dos princípios da tradição matemática para o tratamento de termos singulares indefinidos em linguagem natural; fora, portanto, do contexto matemático. O resultado desta extensão foi uma abordagem perfeitamente coincidente com a de Russell–Quine.

Esta coincidência evidencia que a abordagem Russell–Quine fundamenta-se sobre os mesmos princípios que embasam o modo matemático tradicional de lidar com termos indefinidos. (FARMER, 2004), de quem adaptamos os princípios apresentados na seção 5, não os compilou interessado em estudar os seus fundamentos filosóficos. Seu interesse, bastante prático, era o de identificar as regras lógicas deste tratamento de modo a propor alterações nas abordagens da lógica clássica de primeira ordem e teoria simples de tipos que o habilitassem a implementar em sistemas computacionais de matemática o mesmo tipo de abordagem a termos singulares indefinidos presente na tradição matemática. Por isso ele os propôs como regras práticas que indicam, em cada caso, a maneira tradicional de tratar os termos indefinidos.

Nosso interesse, ao contrário, está na comparação de abordagens diversas do tratamento de termos indefinidos e, portanto, volta-se para os fundamentos destas abordagens. Com isso em mente buscamos identificar um conjunto mais básico ainda de fundamentos que norteiam tanto os princípios da abordagem matemática tradicional, quanto da própria abordagem Russell–Quine. Podemos expressá-los da seguinte forma:

- (i) Termos singulares indefinidos, que não denotam ou que denotam ambigualmente mais de um objeto, são perfeitamente legítimos e aceitáveis. Não são erros semânticos, não precisam ser evitados nem corrigidos.
- (ii) Um termo singular indefinido não impõe a suspensão de julgamento sobre a verdade ou falsidade de uma proposição declarativa que o contenha. Proposições declarativas são, portanto, sempre verdadeiras ou falsas, independentemente de conterem ou não termos indefinidos.
- (iii) O uso de um termo singular pressupõe a aceitação de sua referencialidade. A presença de um termo singular indefinido evidencia uma falha referencial que indica a frustração desta pressuposição. Portanto, uma proposição atômica que contenha algum termo singular indefinido será, por isso, falsa.

Podemos identificar o fundamento (i) tanto na abordagem Russell–Quine quanto na tradição matemática pelo fato de ambas aceitarem termos singulares indefinidos sem a imposição de nenhuma medida de proibição ou reforma. O fundamento (ii) também se faz notar no fato de que ambas abordagens valoram todas as proposições, não deixando a indefinição se propagar para o nível do julgamento sobre a verdade ou falsidade das proposições. Por fim, o fundamento (iii) está presente na abordagem Russell–Quine quando esta exige que se afirme a existência e unicidade dos termos individuais. Se alguma destas exigências falhar, falha também a referencialidade do termo e isto incidirá na falsidade da proposição. Este mesmo fundamento está presente explicitamente no princípio 5.5 da abordagem da tradição matemática.

É justamente porque ambas estas abordagens têm os mesmos fundamentos que a abordagem funcional coincide com a abordagem Russell–Quine. Afinal, propusemos a abordagem funcional apenas como uma ampliação do escopo da abordagem tradicional da matemática para o âmbito da linguagem natural. Obtida desta maneira por ampliação de escopo, ela também compartilha estes mesmos fundamentos e por isso coincide com a abordagem Russell–Quine.

E quanto às teorias de Frege e Meinong? Meinong parece simplesmente rejeitar que existam termos singulares indefinidos e, como consequência, rejeita os três fundamentos acima. Ele exige que todos os termos tenham referência individual e, por isso, todos os termos denotam. Já Frege, apesar de admitir a ocorrência de termos singulares indefinidos, principalmente no contexto da linguagem natural, não nutre nenhuma simpatia por eles, tratando-os

como inconveniências linguísticas que necessitam de correção nos contextos mais controlados da matemática e da conceitografia. Ele, portanto, rejeita o fundamento (i) já que procura evitar e corrigir os termos indefinidos. Frege, além disso, rejeita igualmente o fundamento (ii), pois na versão Frege–Strawson de sua abordagem, que admite a ocorrência de termos singulares indefinidos, as sentenças nas quais estes termos ocorrem não são nem verdadeiras nem falsas. Ou seja, a presença de um termo singular indefinido impõe para Frege, contrariamente ao fundamento (ii), a suspensão sobre o julgamento de verdade ou falsidade. Quanto ao fundamento (iii), ainda que Frege não o rejeite explicitamente, sua abordagem o contradiz. De acordo com o fundamento (iii), qualquer proposição atômica em que ocorra um termo indefinido é falsa. No entanto, a versão Frege–Strawson considera indefinido o valor de verdade de uma proposição com termo singular indefinido e, nas versões Frege–Carnap e Frege–Grundgesetze, a atribuição artificial de referência aos termos indefinidos faz, por exemplo, da terceira proposição de nossa tabela comparativa ( $\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$ ) uma sentença verdadeira que, no entanto, a não ser por uma atribuição artificialmente forçada de denotação, possui termos singulares indefinidos. Sobre esta terceira proposição de nossa tabela, cabe ainda acrescentar que a abordagem de Frege, em todas as suas versões, discorda da abordagem tradicional da matemática que, juntamente com a abordagem Russell–Quine, a considera falsa.

Gostaria ainda de argumentar que a abordagem funcional que propusemos ajudou-nos a evidenciar a coincidência entre os fundamentos da abordagem Russell–Quine com os da tradição matemática e que, conforme pudemos ver, a abordagem de Frege é francamente oposta a estes fundamentos. Além disso, a abordagem funcional mostrou a plausibilidade e adequação da abordagem tradicional da matemática para o contexto mais amplo da linguagem natural. Considero que estes fatos dão suporte à abordagem Russell–Quine comparativamente à de Frege, por trazerem a tradição matemática como sua aliada.

Evidentemente o assunto não se encerra aqui. Há uma vasta e conhecida bibliografia que se desenvolveu desde então sobre o assunto, com muitas outras teorias que não tratamos e que se valem de ferramentas formais mais recentes e sofisticadas, como a semântica dos mundos possíveis, por exemplo. Entre elas podemos citar os trabalhos de (DONELLAN, 1966), (KRIPKE, 1980), (CHATEAUBRIAND, 2001), (EVANS, 1982), (NEALE, 1990), (SOAMES, 1998). Cabe, por isso, reforçar mais uma vez que a nossa intenção com a proposição de mais um abordagem foi primordialmente argumentativa, com o intuito de evidenciar a aproximação entre a teoria de Russell complementada pelas considerações de Quine e o tratamento tradicionalmente dado na prática matemática aos termos indefinidos. Tanto que o fato de nossa proposta de interpretação funcional, nos resultados de suas análises, coincidir com a teoria Russell–Quine, indica que não estamos defendendo uma nova posição teórica sobre a questão.

Finalizo com uma breve consideração sobre a lógica clássica e a sua relação com a matemática. A lógica clássica, certamente sob influência das ideias reformistas de Frege aqui expostas, banuiu de sua consideração os termos indefinidos. Todos os nomes denotam e todas as suas funções são totais. Se considerarmos que a principal motivação para a consolidação da lógica clássica nos padrões que ela tem contemporaneamente foi a de constituir-se em um instrumento de formalização da matemática, esta sua característica de não admitir a ocorrência de termos singulares indefinidos, antes de ser uma qualidade é um defeito, uma vez que estes termos ocorrem inevitavelmente na prática matemática, conforme vimos na seção 5. A lógica clássica não é, portanto, a lógica da matemática. Esta sua rejeição a torna menos adequada para formalizar as inferências da prática matemática do que o são as lógicas livres, lógicas alternativas de um

tipo que admite a ocorrência de termos que não denotam e que, por isso, conseguem formalizar a abordagem tradicional da matemática aos termos singulares indefinidos.

## Referências

- ALSTON, W. Ontological commitments. *Philosophical Studies*, v. 9, 1958.
- BLACKBURN, S.; CODE, A. The Power of Russell's Criticism of Frege: 'On Denoting' pp. 48-50. *Analysis*, Oxford University Press on behalf of The Analysis Committee, v. 38, n. 2, p. pp. 65-77, 1978. ISSN 00032638. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/3327496>>.
- CARNAP, R. *Meaning and Necessity: A Study in Semantics and Modal Logic*. Chicago: University of Chicago Press, 1947. Disponível em: <<http://www.bibsonomy.org/bibtex/27c5d4d13d322de4bbb4d2429717d7624/chb>>.
- CHATEAUBRIAND, O. *Logical Forms*. Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2001. v. 34. (Coleção CLE, v. 34). Part I - Truth and Descriptions.
- CHATEAUBRIAND, O. Quine and ontology. *Principia*, v. 7, 2003.
- CHURCH, A. *Introduction to Mathematical Logic (PMS-13)*. Princeton University Press, 1996. (Princeton Landmarks in Mathematics and Physics). ISBN 9780691029061. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=JDLQOMKbdScC>>.
- DONELLAN, K. Reference and definite descriptions. *Philosophical Review*, v. 75, 1966.
- DUMMETT, M. *Frege: Philosophy of Language*. Harvard University Press, 1993. ISBN 9780674319318. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=EYP7uCZIRQYC>>.
- EVANS, G. *The Varieties of Reference*. Oxford: Oxford University Press, 1982.
- FARMER, W. M. Formalizing Undefinedness Arising in Calculus. In: BASIN, D. A.; RUSINOWITCH, M. (Ed.). *IJCAR*. Springer, 2004. (Lecture Notes in Computer Science, v. 3097), p. 475-489. ISBN 3-540-22345-2. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-25984-8\\_35](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-25984-8_35)>.
- FREGE, G. *The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System*. University of California Press, 1964. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=R1AVWnW1JvUC>>.
- FREGE, G. Sobre o Sentido e a Referência. In: *Lógica e Filosofia da Linguagem*. 2ª. ed. São Paulo: EdUSP, 2009. cap. 7, p. 129-158.
- KAPLAN, D. What is Russell's theory of descriptions? In: D. F. PEARS. *Bertrand Russell: A Collection of Critical Essays*. New York: Anchor Books, 1972, (Modern studies in philosophy). p. 227-244.
- KAPLAN, D. On the logic of demonstratives. *Journal of Philosophical Logic*, Springer Netherlands, v. 8, p. 81-98, 1979. ISSN 0022-3611. 10.1007/BF00258420. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF00258420>>.

- KRIPKE, S. *Naming and Necessity*. Oxford: Basil Blackwell, 1980.
- LEWIS, D. *Counterfactuals*. [S.l.]: Basil Blackwell Ltd, 1973.
- MEINONG, A. The Theory of Objects. In: CHISHOLM, R. M. (Ed.). *Realism and the Background of Phenomenology*. [S.l.]: Ridgeview Pub Co, 1981. ISBN 0917930142.
- MENDELSON, R. *The Philosophy of Gottlob Frege*. Cambridge University Press, 2005. ISBN 9780521836692. Disponível em: <[http://books.google.com.br/books?id=G6%5C\\_90xFwUbUC](http://books.google.com.br/books?id=G6%5C_90xFwUbUC)>.
- NEALE, S. *Descriptions*. Ma: MIT Press, 1990.
- PELLETIER, F. J.; LINSKY, B. Russell vs. Frege on definite descriptions as singular terms . In: N. GRIFFIN; D, JACQUETTE. *Russell vs. Meinong: the legacy of "On Denoting"* . New York: Taylor & Francis Routledge, 2009, (Routledge Studies in Twentieth-Century Philosophy , v. 29). p. 284. ISBN 9780415963640.
- QUINE, W. V. O. On What There Is. In: *From a Logical Point of View*. New York: Harper Torchbooks, 1963. p. 1–19.
- RUSSELL, B. On Denoting. *Mind*, v. 56, n. 14, p. 479–493, 1905.
- RUSSELL, B. *The Philosophy of Logical Atomism*. [S.l.]: Routledge, 1985.
- SEARLE, J. Russell's Objections to Frege's Theory of Sense and Reference. *Analysis*, Oxford University Press on behalf of The Analysis Committee, v. 18, n. 6, p. pp. 137–146, 1958. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/3326570>>.
- SMITH, J. F. The Russell-Meinong Debate. *Philosophy and Phenomenological Research*, International Phenomenological Society, v. 45, n. 3, p. pp. 305–350, 1985. ISSN 00318205. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2107269>>.
- SOAMES, S. The modal argument: Wide scope and rigidified descriptions. *Noûs*, v. 32, 1998.
- STRAWSON, P. On Referring. *Mind*, v. 59, p. 320–344, 1950.
- STRAWSON, P. Singular terms and predication. *Journal of Philosophy*, v. 57, 1961.
- TARSKI, A. The semantic conception of truth: and the foundations of semantics. *Philosophy and phenomenological research*, JSTOR, v. 4, n. 3, p. 341–376, 1944.