# UMA VISÃO FILOSÓFICA ACERCA DA SEMÂNTICA ALGÉBRICA PARA A LÓGICA MODAL

Samir Gorsky*

**Resumo:** A lógica modal tem sido criticada por conta da sua ontologia subjacente, principalmente por Quine, um dos filósofos mais importantes a manter tal crítica. Seu principal argumento está fundado na ideia de que a semântica da lógica modal é baseada na noção de mundos possíveis e este conceito permite uma proliferação de entidades no universo (ver (QUINE, 1953)). A consequência disso é um grande problema em termos ontológicos. Entretanto, a semântica dos mundos possíveis não são a única semântica possível para a lógica modal; existem semânticas algébricas, por exemplo. Os trabalhos de Jósson, Mackinsey, Tarski e Lemmon nos anos quarenta, cinquenta e sessenta foram muito importantes para o desenvolvimento de tal semântica (ver (MCKINSEY, 1941a), (JóNSSON; TARSKI, 1951)). Bull e Segerberg em *Handbook of Philosophical Logic* (BULL; SEGERBERG, 1984) argumenta que se o artigo de Jósson e Tarski tivesse sido lido mais atentamente quando foi publicado, a história da lógica modal teria sido diferente. O esquema $G^{mnpq}$ generaliza uma quantidade infinita de esquemas de axiomas (cf. (LEMMON; SCOTT; SEGERBERG, 1977)); baseado neste esquema, os resultados de completude e outras propriedades importantes podem ser provadas para uma quantidade infinita de sistemas modais em termos puramente algébricos. Estes resultados mostram que a semântica algébrica é tão apropriada quanto a semântica de mundos possíveis e, do ponto de vista filosófico, as semânticas algébricas podem ser vistas como uma resposta às críticas quineanas. Portanto, esses resultados são justificativas filosófica para o estudo da lógica modal e da sua semântica algébrica.

**Palavras-chave:** Lógica modal. Semântica algébrica.

**Abstract:** Modal logic has been criticized with respect to its underlying ontology, mainly by Quine, the most important philosopher who developed and maintained such criticism. His main argument is founded in the view that this semantics is based on the notion of possible worlds, and this concept allows a proliferation of entities in the universe (cf. (QUINE, 1953)). The consequence of this is a great problem in ontological terms. However, possible-world semantics are not the only possible semantics for modal logics: there are also the algebraic semantics, for instance. The work of Jósson, Mackinsey, Tarski and Lemmon in the years forty, fifty and sixties was very important for the development of such semantics (cf. (MCKINSEY, 1941a), (JóNSSON; TARSKI, 1951)). Bull and Segerberg in *Handbook of Philosophical Logic* (BULL; SEGERBERG, 1984) even claim that if the paper by Jósson and Tarski had been more widely read when it was published, the history of modal logic might have been different. The schema $G^{mnpq}$ generalizes infinitely many modal axiom schemas (cf. (LEMMON; SCOTT; SEGERBERG, 1977)); based upon this schema, completeness results and other important properties can be proven for infinitely many systems of modal logics in purely algebraic terms. These results show that algebraic semantics is as appropriate as the possible-worlds semantics, and from the philosophical point of view algebraic semantics can thus be seen as a response to the Quinean criticisms. We have thus a philosophical justification for the study and development of both modal logic and its algebraic semantics.

**Keywords:** Modal logic. Algebraic semantics.

*Professor do Departamento de Filosofia da Universidade Federal do Rio Grande do Norte

## Introdução

Começaremos este artigo com uma breve apresentação dos conceitos de semântica e completude para sistemas lógicos. Em seguida, abordaremos a temática da semântica algébrica. Este tipo de semântica é interessante quando relacionada às lógicas modais, pois é um exemplo de semântica que não faz referência a mundos possíveis. Apresentaremos um resultado de completude para as lógicas modais baseado nos artigos de Lemmon *Algebraic Semantics for Modal Logic I and II* (ALGEBRAIC. . . , 1966). Por fim, mostraremos que as semânticas algébricas para as lógicas modais podem ser consideradas adequadas uma vez que existe o teorema de representação para as álgebras modais.

## Semântica

"A semântica de uma língua natural ou formal, é o conjunto de regras e princípios de acordo com os quais as expressões dessa língua são interpretadas" (BRANQUINHO, 2006). Desta forma, a semântica é uma área do conhecimento que tem por tema o significado dos termos de uma linguagem. Na definição acima também aparece o conceito de "interpretação". Esta interpretação consiste em estabelecer:

(1) O sentido das diversas expressões (simples ou compostas) de uma linguagem.

(2) A referências dessas mesmas expressões.

Os itens acima remetem ao problema já conhecido sobre referência e sentido (ver (FREGE, 1892)). Este problema é posto para as linguagem formais de maneira *sui generis*. A tarefa central da interpretação de uma linguagem formal é a construção do conceito de verdade para uma dada interpretação. A partir deste conceito de verdade em L (L é uma linguagem formal qualquer) é possível definir os conceitos restantes da semântica.

**Definição 2.1.** *Modelo: Uma interpretação I de L é um modelo de um conjunto* $\Gamma$ *de fórmulas de L se, e somente se, todas as fórmulas de L resultam verdadeiras para I.*

**Definição 2.2.** *Consistência: Um conjunto* $\Gamma$ *de fórmulas de L é consistente se, e somente se,* $\Gamma$ *tem um modelo.*

**Definição 2.3.** *Fórmula logicamente válida: Uma fórmula* $\varphi$ *de L é logicamente válida (denotação* $\models_L \varphi$*) se, e somente se, em todas as I que são modelos de* $\Gamma$*,* $\varphi$ *é verdadeira.*

Definidos os elementos básicos de uma semântica para uma linguagem formal temos em mãos os instrumentos para a obtenção de resultados metateóricos. Como exemplos de tais resultados temos as provas de consistência e completude semântica para os sistemas formais. Em geral esses resultados fazem parte do que chamamos teoria de modelos.

Neste trabalho iremos nos concentrar nos resultados de completude dos sistemas modais. Grosso modo, dizemos que um sistema é completo se tudo o que queremos que seja teorema (ou seja, as fórmulas válidas ou verdadeiras) é de fato teorema. Segundo Church, a noção de completude, assim como a de consistência tem uma motivação semântica. A idéia é que os teoremas não devam ser conflitantes com as suas interpretações ((CHURCH, 1956) pg. 109).

Podemos dizer que um dos maiores projetos que encontramos ao estudar lógica é o de se construir um sistema, ou conjunto de sistemas, que contenha(m) todas as verdades da lógica pura. Isto ainda não foi feito, podemos então perguntar; e as verdades da lógica proposicional, já foram formalizadas em algum sistema? A resposta a essa pergunta é afirmativa e podemos encontrar várias provas diferentes para essa resposta (ver *Introduction to mathematical Logic* (CHURCH, 1956), *Mathematical Logic* (SHOENFIELD, 1973), *Model Theory* (KEISLER, 1992), *Introduction to Mathematical Logic* (MENDELSON, 1997) etc. para maiores informações sobre a lógica proposicional). Comecemos então a analisar o caso proposicional para então passarmos para a lógica modal, que é um exemplo de sistema estendido da lógica proposicional.

Em primeiro lugar, notemos que a linguagem da lógica proposicional é adequada para expressar qualquer função veritativa (ou função de verdade). Isto não significa que a linguagem da lógica proposicional é capaz de expressar qualquer verdade sobre funções veritativas (funções de verdade). A linguagem proposicional não pode, por exemplo, expressar a verdade de que existe um número infinito enumerável de distintas funções veritativas. Porém podemos provar (i) que a linguagem da lógica proposicional (que contenha como conectivos $\neg$ e $\rightarrow$ ) é adequada para expressar as funções veritativas (cf. (HUNTER, 1973) pp 62-67). A partir deste resultado podemos então mostrar que: (ii) qualquer fórmula verofuncional $\varphi$ com conectivos arbitrários pode ser correlacionada a uma única fórmula na forma normal disjuntiva e com a mesma tabela de verdade. (iii) Qualquer fórmula na forma normal disjuntiva pode ser correlacionada a uma única fórmula da linguagem proposicional que tenha a mesma tabela de verdade que a primeira. Nada nos quarante, entretanto, que esta relação seja 1-1.

A completude será a idéia chave deste capítulo. Discutiremos um tipo especial de semântica (a semântica algébrica) e o resultado de completude desta semântica para certos sistemas modais.

## Semântica algébrica

Ao analisarmos a história da lógica modal no século XX (ver capítulo 1 do presente trabalho) observamos que as lógicas modais foram estudadas primeiramente a partir de estruturas algébricas. Hugh MacColl foi o primeiro a fazer uma análise algébrica das proposições modais. Seu trabalho apareceu na revista *Mind* entre 1880 e 1906 em uma série de artigos sob o título *Symbolic Reasoning*(ver *Mathematical Modal Logic: a View of its Evolution* (GOLDBLATT, 2000) p. 4). A conjunção segundo MacColl era simbolizada por $ab$, e $a+b$ foi usado para simbolizar a disjunção. A implicação entre $a$ e $b$ ($a$ implica $b$) tinha a seguinte forma: $a:b$ e a equivalência ficou $a=b$. A definição de equivalência era a mesma que conhecemos hoje em dia, ou seja, a composição de duas implicações $(a:b)(b:a)$. Para a negação MacCol usou o símbolo '. Assim, $a'$ representava a negação de $a$.

Boole usou $a=1$ e $a=0$ para "$a$ é verdadeiro" e "$a$ é falso" respectivamente, porem deu um aspecto modal às suas definições por causa de sua leitura temporal destas ($a$ é sempre verdadeiro e $a$ é sempre falso) (ver *An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* (BOOLE, 1954) capítulo XI). MacColl usou as letras gregas $\varepsilon$ e $\eta$ para se referir aos conceitos de 'certeza' e 'impossibilidade'. Tais letras faziam o mesmo papel que o 0 e 1 do trabalho de Boole. Mais tarde MacColl ainda introduziu o símbolo $\theta$ para designar aquilo que não é nem certo nem impossível. Por fim, as expressões: $(a = \varepsilon)$, $(b = \eta)$ e $(c = \theta)$ expressavam '*a* é certeza', '*b* é impossível' e '*c* é variável' (nem certeza, nem impossível). Tais fórmulas foram abreviadas por questão de simplicidade. Suas novas formas eram: $a^{\varepsilon}$, $b^{\eta}$ e $c^{\theta}$. Foram acrescentados ainda as seguintes fórmulas: $d^{\tau}$ para '*d* é verdadeiro' e $e^{\iota}$ para '*e* é falso'. Desta forma, a expressão $a : b$ era equivalente a $(ab')^{\eta}$ (é impossível que *a* e não-*b*).

Nos dias de hoje, temos visto um renovado interesse sobre a álgebra desenvolvida por MacColl. Por exemplo, o periódico *The Nordic Journal of Philosophical Logic* abriu espaço para o estudo dos trabalhos citados acima. Em particular o artigo *Hugh MacColl and the Algebra of Strict Implication* de Stephen Read (ver (READ, 1998)) apresenta uma argumentação sobre a interpretação do sistema apresentado por MacColl como sendo a lógica modal T desenvolvida mais tarde pelos trabalhos de Feys e von Wright (ver *Mathematical Modal Logic: a View of its Evolution (GOLDBLATT, 2000).*

Antes de começarmos o estudo das álgebras modais devemos distinguir os diferentes sistemas modais. A distinção entre sistemas modais pode ser feita a partir de matrizes. Um importante teorema acerca da caracterização dos sistemas modais a partir de matrizes se deve a Dugundji que em 1940 publicou seus resultados que mostravam a não possibilidade de termos matrizes finitas características para alguns sistemas modais. Existem ainda outras técnicas para a distinção dos sistemas modais. Duas das mais importantes destas técnicas são, o método algébrico empregado por McKinsey e Tarski (1941 e 1948) (ver *A Solution of the Decision Problem for the Lewis systems S2 and S4, with an Application to Topology* (MCKINSEY, 1941b) e *Some Theorems about the Sentential Calculi of Lewis and Heyting* (TARSKI, 1948a)) e o método semântico de Kripke (1959 e 1963) (ver *A completeness theorem in modal logic* (KRIPKE, 1959) e *Semantic analysis of modal logic I. Normal modal propositional calculi* (KRIPKE, 1963)). Os artigos escritos por Lemmon na década de 60 têm por objetivo apresentar uma síntese destes dois métodos. Um interessante resultado mostrado nestes artigos é que a completude semântica pode ser deduzida de resultados algébricos por meio de um teorema central. No primeiro artigo Lemmon tem por objetivo mostrar que método algébrico McKinsey-

Tarski, que é bem sucedido quando aplicado ao sistema $S4$, pode ser estendido para um grupo de seis sistemas modais onde o mais forte destes sistemas é o T. O segundo artigo trata de sistemas mais fortes e tinha-se como projeto um terceiro artigo que trataria da logica modal quantificada para todos os sistemas vistos (este terceiro artigo não chegou a ser escrito).

O método usado para trabalhar esses diferentes sistemas modais será o mesmo. Primeiro se estabelece uma correlação entre as matrizes regulares para cada sistema e um certo tipo de álgebra. Depois, usando as matrizes de Lindenbaum prova-se que cada sistema tem a propriedade do modelo finito e portanto que são decidíveis. Uma conseqüência disto é que poderemos restringir a nossa atenção para álgebras finitas. Por último será estabelecido o teorema de representação para cada sistema em termos de uma álgebra baseada no conjunto de todos os subconjuntos de um dado conjunto. Essas representações resultam na conexão entre o ponto de vista algébrico e o ponto de vista da semântica dos mundos possíveis (ou semântica de Kripke).

## Sistemas modais fracos

Os sistemas modais fracos costumam não receber uma atenção especial dos filósofos. Talvez porque parece que tais sistemas não consigam dar conta da diversidade de interpretações filosóficas sobre as modalidades. Todavia, do ponto de vista da teoria geral da semântica, tais sistemas tem sido mais observados, pois é apenas através do estudo das lógicas modais fracas que podemos nos dar conta das limitações existentes com relação à semântica padrão atual (ver *Some remarks on (weakly) weak modal logics* (SCHOTCH, 1981)). Chamaremos de fraco (seguindo Lemmon, *Algebraic Semantics for Modal Logic I, (ALGEBRAIC. . . , 1966)* os sistema mais fracos ou equivalentes a T. Apresentamos a seguir os sistemas a serem analisados.

**Axiomas:**

**Ax. 1** $A \to (B \to A)$

**Ax. 2** $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

**Ax. 3** $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

**Ax. 4** $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

**Ax. 5** $\Box A \to \neg\Box\neg A$

**Ax. 6** $\Box A \rightarrow A$

**Regras:**

**Reg. 1** $A, A \rightarrow B \vdash B$

**Reg. 2** $A \rightarrow B \vdash \Box A \rightarrow \Box B$

**Reg. 3** $A \vdash \Box A$

**Definições:**

**Df. 1** $A \vee B := \neg A \rightarrow B$

**Df. 2** $A \wedge B := \neg(\neg A \vee \neg B)$

**Df. 3** $A \leftrightarrow B := (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

**Df. 4** $\Diamond A := \neg \Box \neg A$

**Df. 5** $A \Rightarrow B := \Box(A \rightarrow B)$

**Df. 6** $A \Leftrightarrow B := (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow B)$

**Df. 7** $\Box^n A := \Box \underbrace{\ldots}_{'n' vezes} \Box A$

**Df. 8** $\Diamond^n A := \Diamond \underbrace{\ldots}_{'n' vezes} \Diamond A$

**Df. 9** $A \Rightarrow^n B := \Box^n(A \rightarrow B)$

**Df. 10** $A \Leftrightarrow^n B := (A \Rightarrow^n B) \wedge (B \Rightarrow^n A)$

Os seis sistemas modais são definidos como se segue:

C2 = [A1 - A4 ; R1, R2]

D2 = [A1 - A5 ; R1, R2]

E2 = [A1 - A4, A6 ; R1, R2]

T(C) = [A1 - A4 ; R1, R3]

T(D) = [A1 - A5 ; R1, R3]

T = [A1 - A4, A6 ; R1, R3]

O cálculo proposicional é definido como [A1 - A3, R1] mais as definições D1 - D3. Portanto o cálculo proposicional clássico aparece como subestrutura dos sistemas modais apresentados. Vale ainda observar que em ambos os sistemas contendo A6 (E2 e T), A5 é dedutível e nos sistemas T(C), T(D) e T a regra R2 pode ser derivada. Portanto temos uma ordem de inclusão dos sistemas modais fracos , onde o sistema mais fraco pode ser visto como subsistema de um sistemas mais forte. Tal relação de ordem pode ser ilustrada pela seguinte tabela:

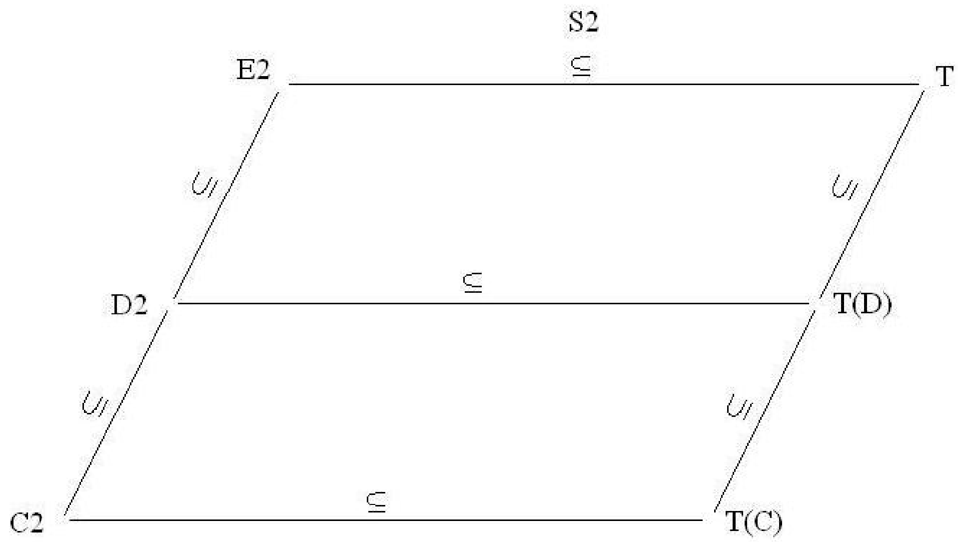


**Figura 3: Tabela de inclusão dos sistemas modais fracos**

**Teorema 3.1.** *A regra R2 é derivada nos sistemas T(C), T(D) e T.*

*Proof.* 1. $A \to B$ Pr.

2. $\Box(A \to B)$ 1, R3.

3. $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ A4.

4. $\Box A \to \Box B$ 2,1 R1.

$\Box$

Primeiramente estudaremos o sistema C2. Podemos explicar tal decisão a partir do seu valor prático pois os resultados obtidos neste sistema podem facilmente ser estendido para os sistemas mais fortes. Por outro lado o sistema C2 é o sistema considerado minimal da lógica modal (embora alguns sistemas mais fracos possam ser encontrados).

Abaixo são apresentados alguns teoremas do sistema C2:

1) $\vdash_{C2} \Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$

2) $\vdash_{C2} \Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$

3) $\vdash_{C2} \Diamond(A \wedge B) \to (\Diamond A \wedge \Diamond B)$

4) $\vdash_{C2} (\Box A \vee \Box B) \to \Box(A \vee B)$

5) $\vdash_{C2} \Box^n A \to (B \Rightarrow^n A)$

6) $\vdash_{C2} \Box\neg A \to (A \Rightarrow^n B$

7) $\vdash_{C2} (A \Rightarrow^{n+m} B) \to (\Box^n A \Rightarrow^m \Box^n B)$

8) $\vdash_{C2} (A \Rightarrow^{n+m} B) \to (\Diamond^n A \Rightarrow^m \Diamond^n B)$

9) $\vdash_{C2} \Box^n A \leftrightarrow (\neg A \Rightarrow^n A)$

10) $\vdash_{C2} \Box^n A \leftrightarrow ((B \to B) \Rightarrow^n A)$

11) $\vdash_{C2} (A \Rightarrow^n B) \leftrightarrow \neg\Diamond^n(A \wedge \neg B)$

12) $\vdash_{C2} (A \Rightarrow^{n+m} B) \to ((B \Rightarrow^n C) \Rightarrow^m (A \Rightarrow^n C))$

Os seguintes teoremas de D2 e E2 não são teoremas de C2 (chamaremos estes resultados de (*)):

1) $\vdash_{D2} \Diamond(A \to)A)$

2) $\vdash_{D2} \Diamond(A \to A) \leftrightarrow (A \to A)$

3) $\vdash_{E2} A \to \Diamond A$

Um notável aspecto dos sistemas T(C), T(D) e T é resultado da regra R3 que prefixa o operador $\Box$ aos teoremas já demonstrados.

**Teorema 3.2.** *Se* $\vdash_{C2(D2,E2)} A$*, então* $\vdash_{T(C)(T(D),T)} \Box^n A$

Outro resultado interessante é o seguinte:

**Teorema 3.3.** $\vdash_T \Box(A \to A) \leftrightarrow (A \to A)$

Uma característica compartilhada por todos os seis sistemas visto mas que não aparece no sistema S2 é a possibilidade de substituição de equivalentes materiais no interior das fórmulas. O próximo teorema ilustra esta característica.

**Teorema 3.4.** *Para* $S \in \{C2, D2, E2, T(C), T(D), T\}$*. Se* $\vdash_S A \leftrightarrow B$*, então* $\vdash_S ...A... \leftrightarrow ...B...$ *(onde ...B... resulta de ...A... por substituição de zero ou mais ocorrências de A em ...A... por B)*

*Proof.* Prova: A prova se dá por indução no tamanho de ...A..., fazendo usos essenciais de R2 e R3.

$\Box$

## Álgebras e Matrizes

Qual é a relação entre Álgebras e sistemas modais? Sabe-se que existe uma forte conexão entre o sistema de Lewis S4 e as álgebras-fecho (cf. (TARSKI, 1948b)). Uma conexão parecida acontece entre T e a generalização destas álgebras-fecho chamadas de álgebras-extensão (cf. (LEMMON, 1960) e (GOLDBLATT, 1976)). Mas será que podemos ter um método geral para determinar em cada sistema modal qual álgebra deve estar relacionada?

Para estudarmos o sistema C2 usaremos uma outra generalização de álgebra chamada simplesmente álgebra modal (Para maiores esclarecimentos sobre álgebra ver (SANKAPPANAVAR, 1981)).

**Definição 3.5.** *Uma estrutura* $\mathfrak{A} =< M, \cup, \cap, -, \boldsymbol{P} >$ *é uma* álgebra modal *sse* $M$ *é um conjunto de elementos fechado sob as operações* $\cup, \cap, -$ *e* $\boldsymbol{P}$ *tais que:*

*(i)* $M$ *é uma álgebra Booleana com respeito a* $\cup, \cap$ *e* $-$ *(Ver (SANKAPPANAVAR, 1981) para definição de álgebra booleana)*

*(ii) Para* $x, y \in M, \boldsymbol{P}(x \cup y) = \boldsymbol{P}x \cup \boldsymbol{P}y$

**Definição 3.6.** $\boldsymbol{N}x := -\boldsymbol{P} - x$

**Teorema 3.7.** *Em qualquer álgebra Modal* $\mathfrak{A} =< M, \cup, \cap, -, \boldsymbol{P} >$*:*

*(i) Para* $x, y \in M$*,* $\boldsymbol{N}(x \cap y) = \boldsymbol{N}x \cap \boldsymbol{N}y$

*Esta é uma propriedade sobre a dualidade de P e N.*

*(ii) Para* $x, y \in M$*, se* $x \leq y$*, então* $\boldsymbol{P}x \leq \boldsymbol{P}y$ *e* $\boldsymbol{N}x \leq \boldsymbol{N}y$ *(onde* $x \leq y$ *sse* $x \cup y = y$ *sse* $x \cap y = x$

*Monotonicidade da relação* $\leq$ *com relação a P e N.*

*Proof.* (i) $\mathbf{N}(x \cap y) = -\mathbf{P} - (x \cap y) = -\mathbf{P}(-x \cup -y) = -(\mathbf{P} - x \cup \mathbf{P} - y) = -\mathbf{P} - x \cap -\mathbf{P} - y = \mathbf{N}x \cap \mathbf{N}y$.

(ii) Suponha $x \leq y$, ou seja, $x \cup y = y$. Portanto $\mathbf{P}x \cup \mathbf{P}y = \mathbf{P}(x \cup y) = \mathbf{P}y$, daí $\mathbf{P}x \leq \mathbf{P}y$. Por outro lado se $x \leq y$, então $x \cap y = y$ e portanto $\mathbf{N}x \cap \mathbf{N}y = \mathbf{N}(x \cap y) = \mathbf{N}y$, logo $\mathbf{N}x \leq \mathbf{N}y$.

□

A seguir temos a apresentação da relação entre álgebras modais e matrizes.

**Definição 3.8.** *Dada uma assinatura C, uma C-matriz é um par* $M = <A, D>$*, onde* $A =< A, C >$ *é uma álgebra sobre C, e* $D \subseteq A$*. O conjunto D é normalmente referido como o conjunto de valores designados de M. As M-valorações de L(C) (L(C) é o conjunto de fórmulas da linguagem sobre C) são os C-homomorfismos* $v : L(C) \to A$*.*

Em geral uma álgebra pode ser transformada em uma matriz se algum subconjunto D de seus elementos é tomado como o conjunto dos elementos designados. Portanto para cada álgebra com uma cardinalidade N de elementos temos a possibilidade de construir $2^N$ matrizes distintas.

Uma lógica proposicional pode ser interpretada como matriz da seguinte maneira: Tomamos as variáveis proposicionais de uma fbf da lógica para ser a imagem sobre os elementos da matriz. Interpretamos os conectivos da lógica como operações na (ou definíveis na) matriz; deste modo, cada fbf A contendo n variáveis proposicionais está associada a uma (única) função-matriz $f^{(A)}$ de n variáveis.

**Definição 3.9.** *Dizemos que A é* satisfeita *por uma matriz sse, sob uma dada interpretação, o valor de* $f^{(A)}$ *para toda n-upla de elementos da matriz permanece em D. Caso contrário dizemos que A é* falsificada *pela matriz.*

**Definição 3.10.** *Um sistema S é* satisfeito *por uma matriz sse todos os teoremas de S são satisfeitos pela matriz.*

**Definição 3.11.** *Um sistema é* caracterizado *por uma matriz (ou uma matriz é* característica *para um sistema) sse as fbfs do sistema satisfeitas pela matriz são todas teoremas e apenas os teoremas deste sistemas.*

Recíprocamente, dada uma assinatura apropriada (ou seja, um conjunto de conectivos) e sua matriz-interpretação, temos que cada matriz determina uma lógica proposicional a saber: a lógica cujo os teoremas são exatamente a fbfs desta assinatura satisfeitas pela matriz sob a dada interpretação. Esta matriz também será a matriz característica para o sistema correspondente.

Mostramos a seguir como construímos uma matriz característica para uma dada lógica proposicional.

Para qualquer lógica proposicional L, seja $W_L$ o conjunto de suas fbfs (em termo dos conectivos $c_1, c_2, ..., c_n$), e $T_L$ o subconjunto de seus teoremas.

**Teorema 3.12.** *(Lindenbaum) Seja L uma lógica proposicional tal que $T_L$ é fechada sob substituição de variáveis proposicionais. Então existe uma matriz característica $\mathfrak{M}$ para L.*

*Proof.* Notemos que a matriz não precisa ser finita. Suponha que L possua os conectivos $c_1^{a_1}, ..., c_n^{a_n}$, tais que $c_i^{a_i}$ é $a_i$-ádico ($1 \leq i \leq n$). Para os elementos da matriz tomaremos os membros de $W_L$ e para os elementos designados os membros de $T_L$. Definimos, para cada $c_i^{a_i}$ uma função-matriz $a_i$-ádica $c_i^*$ como se segue: para $w_1, ..., w_{a_i} \in W_L$ consideramos $c_i^*(w_1, ..., w_n)$ igual às fbfs que resultam da aplicação do conectivo $c_i^{a_i}$ às fbfs $w_1, ..., w_{a_i}$. Seja $\mathfrak{M}_L =< W_L, T_L, c_1^*, ..., c_n^* >$. Interpretando $c_i^{a_i}$ como $c_i^*$, é fácil ver que todos os teoremas de L são satisfeitos por $\mathfrak{M}_L$. De fato, suponha $t \in T_L$, então qualquer valoração dos argumentos de $W_L$ para $f^{(T)}$ resulta como valor simplesmente a instanciação (por substituição) de t, que por hipótese está em $T_L$. Reciprocamente se $w \notin T_L$, então o valor de $f^W$ está fora de $T_L$ dado que estas valorações para estas variáveis consiste das variáveis proposicionais apropriadas de $w$. Logo $\mathfrak{M}_L$ é característica para L.

$\square$

O teorema 3.3.12 nos mostra como conseguimos obter uma matriz característica a partir de uma lógica proposicional cujo o conjunto de teoremas é fechado para substituição de variáveis proposicionais. Como conseqüência temos o seguinte corolário.

**Corolário 3.13.** *Existe uma matriz característica para cada um dos sistemas C2, D2, etc.*

Apresentamos acima um método geral de se conseguir matrizes características para os sistemas. Todavia os resultados não nos indicam as matrizes que seriam mais interessantes para os nossos estudos. Usamos um método que resulta em matrizes de Lindenbaum. Um sistema pode ter muitas matrizes não isomórficas. A matriz mais interessante para trabalharmos a lógica proposicional é aquela que resulta da álgebra Booleana de dois elementos (ou seja, a matriz da tabela de verdade).

As matrizes que mais nos interessam neste ponto são estruturas $\mathfrak{M} =< M, D, \cup, \cap, -, \mathbf{P} >$ tal que $D \subseteq M$ e $\cup, \cap$ são operadores diádicos, $-, \mathbf{P}$ monádicos em M onde M é fechado para tais operações.

**Definição 3.14.** *Uma matriz* $\mathfrak{M} =< M, D, \cup, \cap, -, \boldsymbol{P} >$ *é* própria *sse* $D \subset M$.

Usaremos ainda as seguintes definições:

**Definição 3.15.** $x \to y := -x \cup y$

**Definição 3.16.** $x \leftrightarrow y := (x \to y) \cap (y \to x)$

**Definição 3.17.** *Uma matriz* $\mathfrak{M} =< M, D, \cup, \cap, -, \boldsymbol{P} >$ *é* regular *sse:*

*(i)* $\mathfrak{M}$ *é própria;*

*(ii) D é ideal aditivo de M;*

*(iii) se* $x \leftrightarrow y \in D$, *então* $x = y$.

*(Um conjunto* $D \subseteq M$ *é um* ideal aditivo *sse* $x \in D, y \in D \Rightarrow x \cap y \in D$ *e* $x \in D, y \in M \Rightarrow x \cup y \in D$.*)*

Os conectivos dos sistemas modais podem ser interpretados em termos de operações nas matrizes. Por exemplo $\Box$ é interpretado como **N**, os demais conectivos são interpretados da maneira usual, ou seja, $\vee$ como $\cup$, $\wedge$ como $\cap$, etc.

O próximo passo é mostrar como se constrói matrizes regulares a partir das matrizes de Lindenbaum. Vimos que existem matrizes de Lindenbaum para cada um dos seis sistemas estudados (C2, D2, E2, T(C) , T(D) e T). As matrizes regulares são construídas a partir de matrizes cujo os elementos são classes de equivalência sob o operador $\leftrightarrow$ das matrizes de Lindembaum. Partiremos então das seguintes definições:

Seja $W$ o conjunto das fbfs dos seis sistemas estudados. Seja T o conjunto dos teoremas de C2 (D2, etc.). Para $A \in W$, considere $E(A) = \{B : B \leftrightarrow A \in T\}$. Seja $\vee, \wedge, \neg, \Diamond$ funções em $W$ nas quais, para fbfs $A, B \in W$, formamos novas fbfs a saber: $A \vee B$,$A \wedge B$, $\neg B$ e $\Diamond A$. Definimos ainda novas funções $\vee_1, \wedge_1, \neg_1$ e $\Diamond_1$ sobre o conjunto de todos os conjuntos $E(A)$ da seguinte maneira:

$E(A) \vee_1 E(B) = E(A \vee B)$
$E(A) \wedge_1 E(B) = E(A \wedge B)$
$\neg_1 E(A) = E(\neg A)$
$\Diamond_1 A = E(\Diamond A)$

Chamamos de $W_1$ o conjunto de todos os conjuntos $E(A)$ para $A \in W$, e $T_1$ o conjunto de todos os conjuntos $E(A)$ para $A \in T$. Obviamente $T_1$ possui apenas um elemento, dado que, para $A, B \in T$, $A \leftrightarrow B \in T$.

Finalmente, definimos uma relação $\simeq$ sobre $W$ de forma que $A \simeq B$ sse $A \leftrightarrow B \in T$ (mostrar que $\simeq$ é uma relação de congruência? isto é uma conseqüência do fato de que todos os seis sistemas possuem o cálculo proposicional como base, junto com o teorema 3.3.4 visto acima). Estamos, portanto, justificados em tratar a estrutura $\langle W_1, T_1, \vee_1, \neg_1, \Diamond_1 \rangle$ como uma matriz; chamamos esta matriz de $\mathfrak{M}_1$. Mostraremos abaixo que $\mathfrak{M}_1$ é uma matriz característica para C2 (D2, etc.).

**Teorema 3.18.** *$\mathfrak{M} = \langle M, \{d\}, \cup, \cap, -, P \rangle$ é uma C2-matriz regular sse $\langle M, \cup, \cap, -, P \rangle$ é uma álgebra modal e $d = 1$.*

*Proof.* Seja $\mathfrak{M} = \langle M, \{d\}, \cup, \cap, -, P\rangle$ uma C2-matriz regular. Para provar que $\langle M, \cup, \cap, -, P\rangle$ é uma Álgebra Booleana, precisamos tomar um conjunto de postulados para tais álgebras e mostrar que estes são satisfeitos pela matriz. (ver *The Elements of Mathematical Logic* (ROSENBLOOM, 1950), *A Course in Universal Algebra* (SANKAPPANAVAR, 1981) e *Algebraic Logic* (HALMOS, 1955)). Dos sete postulados apresentados por Rosenbloom as provas da satisfação de A1, A6, A7 pela matriz são conseqüências triviais do fato de $\mathfrak{M}$ ser uma matriz. Para A2, prova-se que $x \cap y = y \cap x$ como se segue: $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$ é um teorema de C2, daí $x \cap y \leftrightarrow y \cup x \in \{d\}$ pois $\mathfrak{M}$ é uma C2-matriz. Segue-se ainda, de (iii) da Definição 5 que $x \cap y = y \cap x$. A3, A4, A5 são conseqüências similares do fato de que C2 contém o cálculo proposicional clássico, junto com (iii) da Definição 5. Assim $\langle M, \cup, \cap, -, P\rangle$ é uma álgebra modal. Visto que $\langle M, \cup, \cap, -\rangle$ é uma Álgebra Booleana, podemos considerar $1 = x \cup -x$. dado que $\vdash_{C2} A \vee -A$, temos $x \cup -x \in \{d\}$, ou seja, $x \cup -x = d$, daí $d = 1$.

Reciprocamente, seja $\mathfrak{M} = \langle M, \cup, \cap, -, P\rangle$ uma álgebra modal. Dado que $\langle M, \cup, \cap, -\rangle$ é uma álgebra Booleana, é óbvio que os esquemas A1-A3 são satisfeitos por $\langle M, \{1\}, \cup, \cap, -, P\rangle$. A função-matriz correspondente a A4 é $-N(-x \cup y) \cup (-Nx \cup Ny) = P(x \cap -y) \cup (P - x \cup -P - y) = P((x \cap -y) \cup -x) \cup -P - y = P(-x \cup -y) \cup -P - y = (P - x \cup P - y) \cup -P - y = P - x \cup 1 = 1$, portanto o esquema A4 é satisfeito. Para R1, suponha $x = 1$ e $x \to y = 1$. Então $y = (x \cap -x) \cup y = (x \cup y) \cap (-x \cup y) = (1 \cup y) \cap 1 = 1$. Para R2, suponha $x \to y = 1$. Então $-x \cup y = 1$ e $x \leq y$, daí $Nx \leq Ny$ pelo teorema 6 (ii). Assim $Nx \to Ny = -Nx \cup Ny = 1$. Assim $\langle M, \{1\}, \cup, \cap, -, P\rangle$ é uma C2-matriz. Que esta matriz é própria segue-se do fato que $\langle M, \cup, \cap, -\rangle$ é uma álgebra Booleana e portanto contém ao menos 2 elementos. É óbvio que $\{1\}$ é um ideal aditivo de M. Finalmente, dado $x \leftrightarrow y = 1$, $x = y$ pela propriedade encontrada nas álgebras Booleanas, logo $\langle M, \{1\}, \cup, \cap, -, P\rangle$ é também regular.

$\square$

O teorema 3.3.18 nos indica como obtemos uma álgebra modal específica a partir de uma matriz regular e vice-versa (como obtemos uma matriz regular característica a partir da álgebra). Este teorema é uma generalização do teorema 4 que aparece em *An extension Algebras and the Modal System T* de Lemmon. O Teorema 3 do artigo de McKinsey *Solution of the Decision Problem for the Lewis systems S2 and S4, with an Application to Topology* tem este mesmo resultado para o sistema S2 e o teorema 10 deste mesmo artigo o faz para o sistema S4 (cf. (LEMMON, 1960) e (MCKINSEY, 1941b) p. 120).

Em virtude deste teorema não precisaremos mais distinguir a álgebra modal e a sua matriz correspondente que toma 1 como valor designado.

Para os demais sistemas devemos definir as álgebras apropriadas. Portanto:

**Definição 3.19.** *Uma álgebra é* deôntica *sse, além de ser modal, satisfaz o postulado:*

*(iv)* $P1 = 1$

**Definição 3.20.** *Uma álgebra é* epistêmica *sse, além de ser uma álgebra modal, satisfaz o postulado:*

*(v)* $x \leq Px$

**Definição 3.21.** *Uma álgebra é* normal *sse, além de ser uma álgebra modal, satisfaz o seguinte postulado:*

*(vi)* $P0 = 0$

**Teorema 3.22.** *Toda álgebra epistêmica é também uma álgebra deôntica.*

*Proof.* Por (v) nós concluímos $1 \leq P1$. Como se trata de álgebra booleana temos $P1 \leq 1$, daí $P1 = 1$, que é (iv).

□

O teorema acima assegura que os resultados obtidos para as álgebras epistêmicas podem ser inferidos a partir das álgebras deônticas.

**Teorema 3.23.** *A matriz* $\mathfrak{M} = \langle M, \{1\}, \cup, \cap, -, P\rangle$ *é uma D2- (E2-, T(C)-, T(D)-, T-) matriz regular sse* $\langle M, \cup, \cap, -, P\rangle$ *é uma álgebra deôntica (epistêmica, normal, normal deôntica, normal epistêmica) e* $d = 1$.

*Proof.* Em geral a prova se segue do teorema 3.3.18 acrescentado com as seguintes condições. Uma D2-matriz regular preenche a condição (iv) seguido do resultado (*) (2). Uma E2-matriz regular preenche a condição (v) seguido do resultado (*) (3). Uma T(C)-matriz preenche a condição (vi) seguido do teorema 4. Reciprocamente, dado (iv), $Nx \to Px = P-x \cup Px = P(-x \cup x) = P1 = 1$, desta forma o postulado A5 é satisfeito. Dado (v), $Nx \to x = P-x \cup x = (-x \cup P-x) \cup x$ (desde que $P-x = -x \cup P-x$) $= 1 \cup P-x = 1$, portanto o postulado A6 é satisfeito. Dado (vi), suponha $x = 1$. Então $Nx = -P-x = -P0 = -0 = 1$, daí R3 é satisfeito. □

O resultado acima completa a relação entre álgebras e matrizes. Para cada álgebra é possível construir uma matriz regular adequada que identifica os teoremas do sistema. Como cada matriz está ligada a cada sistema lógico temos uma ponte entre a lógica e a álgebra. portanto, os resultados até aqui obtidos nos dão a completude para os seis sistemas modais da seguinte forma:

**Teorema 3.24.** $\vdash_{C2(D2,E2,T(C),T(D),T)}$ *A sse A é satisfeita por todas álgebras modais (deôntica, epistêmica, normal, normal deôntica, normal epistêmica).*

*Proof.* Em virtude do teorema 3.3.18 temos que C2 é satisfeito por qualquer álgebra modal; reciprocamente qualquer não-teorema de C2 é falsificado pela C2-matriz regular característica deste sistema (ver teorema 3.3.12), e assim as álgebras modais equacionam a fórmula correspondente a este não teorema ao valor 0 (teorema 3.3.18). Os outros sistemas são casos similares que usam os teoremas 3.3.23 e 3.3.12). □

Portanto, podemos considerar o resultado acima como sendo um resultado de completude algébrica para as lógicas modais uma vez que mostra que a semântica algébrica "identifica" os (todos) teoremas de um dado sistema modal.

## A propriedade dos modelos finitos

Mostraremos a seguir que os resultados obtidos acima não são alterados se restringirmos o seu campo de atuação para as álgebras finitas. Mostraremos ainda que cada sistema possui a propriedade do modelo finito, ou seja, cada não-teorema A de cada sistema pode ser associado a uma matriz finita satisfazendo o sistema e falsificando A. Daí poderemos também concluir que cada sistema é decidível.

**Teorema 3.25.** *Seja* $\mathfrak{M} = \langle M, \cup, \cap, -, P \rangle$ *uma álgebra modal (deôntica, etc.), e seja* $a_1, ..., a_r$ *uma seqüência de elementos de M. Então existe uma álgebra modal (deôntica, etc.) finita* $\mathfrak{M}_1 = \langle M_1, \cup_1, \cap_1, -_1, P_1 \rangle$ *com no máximo* $2^{2^{r+1}}$ *elementos tais que:*

*(i) Para* $1 \leq i \leq r$, $a_i \in M_1$

*(ii) Para* $x, y \in M_1$, $x \cup_1 y = x \cup y$

*(iii) Para* $x, y \in M_1$, $x \cap_1 y = x \cap y$

*(iv) Para* $x \in M_1$, $-_1 x = -x$

*(v) Para* $x \in M_1$, *tal que* $Px \in M_1$, $P_1 x = Px$

*Proof.* Seja $M_1$ o conjunto de elementos de M obtidos de $P1, a_1, ..., a_r$ por qualquer número finito de aplicações de $\cup, \cap$ e $-$. Um resultado já conhecido da álgebra booleana nos indica que haverão não mais que $2^{2^{r+1}}$ elementos em $M_1$. Consideremos $\cup_1, \cap_1$, e $-_1$ iguais a $\cup, \cap$, $-$ mas restritos a $M_1$. Temos que é imediato o resultado para (i) a (iv). Para $x \in M_1$, dizemos que x é coberto por y sse $y \in M_1$, $Py \in M_1$ e $x \leq y$. Desde que $P1 \in M_1$ e também $1 \in M_1$ segue-se todo elemento é coberto por algum elemento. Se $x$ é coberto por $y_1, ..., y_n$ nós consideramos $P_1 x = Py_1 \cap ... \cap Py_n$, (uma vez que $P_1 x \in M_1$). Se $x$ está coberto por $y_1, ..., y_n$, então $x \leq y_i (1 \leq i \leq n)$, desta forma $Px \leq P_i$ pelo teorema 3.3.7 (ii) e $Px \leq P_1 x$. Reciprocamente, se $x \in M_1$ e $Px \in M_1$, então $x$ é coberto por si mesmo, pois $P_1 x = Px \cap Py_1 \cap ... \cap Py_n$, onde $y_1, ..., y_n$ são os outros elementos que cobrem $x$. Assim $P_1 x \leq Px$. Estes resultados nos mostram que (v) é satisfeito.

Resta mostrar que se $\mathfrak{M}$ é uma álgebra modal, (deôntica, epistêmica, etc.), então $\mathfrak{M}_1 = \langle M_1, \cup_1, \cap_1, -_1, P_1 \rangle$ é também uma álgebra modal (deônti-ca, epistêmica, etc.). O resultado geral para álgebras modal depende da prova de $P_1(x \cup_1 y) = P_1 x \cup_1 P_1 y$. A prova de $P_1 x \cup_1 y = P_1 x \cup_1 P_1 y$ pode ser encontrada no artigo *Solution of the Decision Problem for the Lewis systems S2 and S4, with an Application to Topology*, (MCKINSEY, 1941b) p. 125. Para álgebras deônticas, precisamos mostrar que: dado $P1 = 1$, então $P_1 1 = 1$. Como $1, P1 \in M_1$, (v) se aplica e daí $P_1 1 = P1 = 1$. Para álgebras epistêmicas, precisamos mostrar que: dado $x \leq Px$, então $x \leq P_1 x$. Mas já mostramos que em geral $Px \leq P_1 x$. Para álgebras normais, precisamos mostrar que: dado $P0 = 0$, então $P_1 0 = 0$. Como, se $P0 = 0$, então $P0 \in M_1$, temos (por (v) novamente) $P_1 0 = P0 = 0$. Os demais casos são combinações dos casos já mostrados.

□

**Teorema 3.26.** *Seja A uma fbf com r subfórmulas. Então $\vdash_{C2(D2,etc.)}$ A sse A é satisfeita por todas álgebras modais (deôntica etc.) com, no máximo, $2^{2^{r+1}}$ elementos.*

*Proof.* Se $\vdash_{C2(D2,etc.)} A$, então, pelo teorema 3.3.24, A é satisfeito por todas álgebras modais (deônticas, etc.). Reciprocamente, suponha que A é um não-teorema de C2(D2, etc.) com r subfórmulas. Então A é falsificada com a matriz regular apropriada do teorema 3.3.12, a saber: $\mathfrak{M} = \langle M, \{1\}, \cup, \cap, -, P \rangle$. Sejam $v_1, ..., v_n$ as variáveis proposicionais em A e $a_1, ..., a_n$ os elementos de M que são associados a $v_1,..., v_n$ e que falsifica A. Suponha que, para esta função, os valores das subfórmulas de A diferentes de $v_1,..., v_n$ são $a{\cdot}n + 1, ..., a_r$. Podemos assumir que última fórmula é a própria A, visto que: $a_r \neq 1$. Como $\langle M, \cup, \cap, -, P \rangle$ é uma álgebra modal (deôntica, etc.) (teoremas 3.3.18 e 3.3.23), portanto pelo teorema 3.3.25 existe uma álgebra modal (deôntica, etc.) $\mathfrak{M}_1$ com, no máximo, $2^{2^{r+1}}$ elementos satisfazendo a cinco condições daquele teorema. Podemos considerar (pela condição (i)) a mesma função que associa $a_1, ..., a_n$ a $v_1, ..., v_n$ na matriz $\mathfrak{M}_1$. É claro que esta função associa os mesmos valores para A (por (ii)-(v)) em $\mathfrak{M}_1$ que são associados em $\mathfrak{M}$ a saber: $a_r \neq 1$. Logo A é satisfeita por $\mathfrak{M}_1$.

□

**Corolário 3.27.** *Os sistemas C2, D2, E2, T(C), T(D), T possuem a propriedade do modelo finito, e são portanto decidíveis.*

**Corolário 3.28.** $\vdash_{C2(D2,etc.)} A$ *sse A é satisfeita por todas álgebras modais (deônticas, etc) finitas.*

## Álgebras e modelos

Generalizaremos abaixo a noção de modelos kripkeanos. Mostraremos que, em termos de diferentes estruturas, os teoremas naturais de representação podem ser obtidos com relação às álgebras vistas acima. Dados estes teoremas, os resultados de completude de tipo kripkeano são conseqüências diretas dos resultados de completude da secção anterior.

**Definição 3.29.** *Um enquadramento modal bissortido (e.m.b) é uma tripla ordenada* $\mathfrak{R} = \langle K, Q, U \rangle$*, onde K é um conjunto não-vazio de elementos,* $Q \subseteq K$ *e U uma relação binária definida em K.*

Intuitivamente, podemos pensar $K$ como um conjunto de "estados possíveis" e interpretar $Uxy$ (Para $x, y \in K$) como "y é possivelmente acessível por x" ou "y é um mundo visível a x", etc.

Para entender o papel do subconjunto $Q$ é necessário lembrar que os sistemas mais fracos C2, D2 e E2 não possuem teoremas da forma $\Box A$ e, portanto, que são consistentes mesmo se adicionarmos o esquema $\Diamond A$ como teorema (em pelo menos um mundo deverá valer $\neg A$ e, da mesma forma, em pelo menos um mundo deverá valer $\neg\neg A$ isto para qualquer A). De um ponto de vista interpretativo, isto significa que podemos permitir a possibilidade de mundos nos quais tudo é possível (incluindo contradições), $Q$ portanto, é um conjunto de mundos com essas características (Este dispositivo foi sugerido por Lemmon em conversa com Saul Kripke como podemos constatar em (ALGEBRAIC. . . , 1966) p. 57).

**Definição 3.30.** *Dado um enquadramento modal bissortido $\mathfrak{R} = \langle K, Q, U \rangle$, definimos $\mathfrak{R}^+$ (a álgebra em $\mathfrak{R}$), como $\langle M, \cup, \cap, -, P \rangle$, onde:*

*(i) $M = \wp K$*

*(ii) $\cup, \cap, -$ são como as operações (da teoria de conjuntos) união, intersecção e complemento restritas a M.*

*(iii) Para $A \in M$, $PA = \{x : \exists y(y \in A \wedge Uxy) \vee x \in Q\}$*

**Teorema 3.31.** *Se $\mathfrak{R}$ é um enquadramento modal bissortido, então $\mathfrak{R}^+$ é uma álgebra modal.*

*Proof.* Que $\langle M, \cup, \cap, - \rangle$ é uma álgebra booleana é imediato da condição (ii) acima. Ainda, para $A, B \in \wp K$ temos:

$P(A \cup B) = \{x : \exists y(y \in A \cup B \wedge Uxy) \vee x \in Q\}$

$= \{x : \exists y(y \in A \wedge Uxy) \vee \exists y(y \in B \wedge Uxy) \vee x \in Q\}$

$= \{x : \exists y(y \in A \wedge Uxy) \vee x \in Q\} \cup \{x : \exists y(y \in B \wedge Uxy) \vee x \in Q\}$

$= PA \cup PB$

Portanto $\mathfrak{R}^+$ é uma álgebra modal.

□

Seja $\emptyset$ o conjunto vazio. Por (iii) é imediato:

**Teorema 3.32.** *Na álgebra de qualquer enquadramento modal bissortido:*

*(i) $P\emptyset = Q$*

*(ii) $Q \subseteq PA$, para todo A.*

**Teorema 3.33.** *(Jósson-Tarski) Qualquer álgebra modal finita é isomorfa à álgebra de algum enquadramento modal bissortido finita.*

*Proof.* Seja $\mathfrak{M} = \langle M, \cup, \cap, -, P\rangle$ uma álgebra modal finita. Então, pelo teorema de representação de Stone, $\langle M, \cup, \cap, -\rangle$ é isomórfico a álgebra de todos subconjuntos de um dado conjunto K. Seja $\varphi$ este isomorfismo. Para $A \subseteq K$, tomemos $P'A = \varphi P \varphi_{-1} A$ e $Q = \varphi(P0)$. Para $x, y \in K, Uxy$ sse $x \in P'\{y\}$. Seja $\mathfrak{R} = \langle K, Q, U\rangle$, que é evidentemente uma estrutura modelo. Mostraremos que $\mathfrak{M}$ é isomórfica a $\mathfrak{R}+$ sob $\varphi$. Seja $P^*$ a operação de possibilidade em $\mathfrak{R}_+$, ou seja, $P^*A = \{x : \exists y(y \in A0 \wedge Uxy\} \vee x \in Q\}$. É obvio que $\varphi$ é um isomorfismo com respeito a $\cup, \cap$ e $-$, portanto resta somente mostrar que $\varphi(Px) = P^*(\varphi x)$.

Primeiro provaremos que para $x \in M, \varphi(Px) \cup Q = \varphi(Px)$. Usando o teorema 3.3.7 (ii), $P0 \leq Px$ daí $Px \cup P0 = Px$. Desta forma $\varphi(Px) = \varphi(Px \cup P0) = \varphi(Px) \cup \varphi(P0) = \varphi(Px) \cup Q$, por definição de Q. Agora, considere um átomo $a \in M$. Claramente $\varphi a$ é um conjunto unitário $\{u\}$ para algum $u \in K$, e portanto temos:

$$
\begin{aligned}
&P^*(\varphi(a)) = \{x : \exists y(y \in \{u\} \wedge Uxy) \vee x \in Q\}\\
&= \{x : Uxu \vee x \in Q\}\\
&= \{x : x \in P'u \vee x \in Q\}\\
&= \varphi(Pa) \cup Q\\
&= \varphi(Pa)
\end{aligned}
$$

Qualquer elemento $x \in M$ pode ser representado na forma $a_1 \cup \ldots \cup a_m$ para átomos $a_1, \ldots, a_m$. assim para $x \in M$:

$$
\begin{aligned}
&\varphi(Px) = \varphi(P(a_1 \cup \ldots \cup_m))\\
&= \varphi(Pa_1 \cup \ldots \cup Pa_m\\
&= \varphi(Pa_1) \cup \ldots \cup \varphi(Pa_m)\\
&= P^*(\varphi(a_1)) \cup \ldots \cup P^*(\varphi(a_1))\\
&= P^*(\varphi(a_1) \cup \ldots \cup \varphi(a_m))\\
&= P^*(\varphi(a_1 \cup \ldots \cup a_m))\\
&= P^*(\varphi(x))
\end{aligned}
$$

Logo, $\varphi$ é também um isomorfismo com respeito a P.

$\square$

O teorema de Jósson-Tarski(outra versão): Qualquer álgebra booleana com operadores é imersível na álgebra complexa dos seus ultrafiltros (ver *Algebraic Tools for Modal Logic* (VENEMA, 2001)). Este teorema é semelhante em termos de resultado ao teorema abaixo.

O resultado acima serve como argumento para o posicionamento de Bull e Segerberg com relação à semântica algébrica para a lógica modal (posicionamento este mencionado na introdução do presente trabalho). De fato, ele mostra que a semântica algébrica possui características desejáveis como a decidibilidade. Isto acontece pois podemos focar a atenção sobre as álgebras modais finitas. Portanto os processos de "busca de valores" não se transformam em buscas infinitas. Porém o resultado acima é referente ao caso geral, isto é, à álgebra modal. Resta-nos estender este resultado para os outros sistemas.

Para os outros cinco tipos de álgebras, precisamos de definições apropriadas sobre as correspondentes estruturas-modelo.

Definiremos um enquadramento modal bissortido *deôntico* como sendo um enquadramento modal bissortido $\langle K, Q, U \rangle$ na qual $U$ e $Q$ satisfazem a condição:

($\delta$) Para $x \in K, \exists y Uxy$ ou $x \in Q$.

um enquadramento modal bissortido *epistêmico* é um e.m. $\langle K, Q, U \rangle$ na qual $U$ e $Q$ satisfazem a seguinte condição:

($\varepsilon$) Para $x \in K, Uxx$ ou $x \in Q$.

(($\varepsilon$) é claramente equivalente à condição de que $U$ seja reflexiva em $K - Q$).

Finalmente, definimos uma e.m. *normal* (e.m.n.) como uma e.m. $\langle K, Q, U \rangle$ na qual $Q = \emptyset$. Poderíamos pensar em e.m. de um e.m. normal como sendo uma estrutura $\langle K, U \rangle$ ao invés de uma estrutura $\langle K, Q, U \rangle$: onde não aparecem mundos "estranhos" (queer). Podemos reescrever a condição (iii) para a álgebra sobre um e.m. normal do seguinte modo:

Para $A \in \wp K$:

(iii)' $PA = \{x : \exists y(y \in A \wedge Uxy)\}$

De maneira similar, para uma álgebra sobre um e.m. normal deôntica, a condição $(\delta)$ pode aparecer na forma:

$(\delta)$' para $x \in K, \exists y Uxy$

Para uma álgebra sobre um e.m. normal epistêmica, temos a condição que $U$ seja reflexiva. Assim as e.m.'s normais epistêmicas são idênticas com o que Kripke chama de e.m.'s normais.

**Teorema 3.34.** *Se $\mathfrak{R}$ é uma estrutura modelo deôntica (epistêmica, normal, etc.), então $\mathfrak{R}^+$ é uma álgebra deôntica (epistêmica, normal, etc.).*

*Proof.* Seja $\mathfrak{R} = \langle K, Q, U\rangle$ um e.m. deôntica. Para se provar que $\mathfrak{R}^+$ é uma álgebra deôntica é suficiente, em virtude do teorema 3.3.31, provar que $PK = K$. Mas $PK = \{x : \exists y(y \in K \wedge Uxy) \vee x \in Q\} = K$ por condição $(\delta)$. Seja $\mathfrak{R} = \langle K, Q, U\rangle$ um e.m. epistêmica. Para se provar que $\mathfrak{R}^+$ é uma álgebra epistêmica é suficiente mostrar que (dado o teorema 3.3.31), para $A \subseteq K, A \subseteq PA$. Mas por $(\varepsilon)$, para $x \in A, Uxx \vee x \in Q$, daí $\exists y(y \in A \wedge Uxy) \vee x \in Q$, portanto $x \in PA$. Seja agora $\mathfrak{R} = \langle K, Q, U$ um e.m. normal. Para provarmos que $\mathfrak{R}^+$ é uma álgebra modal devemos (teorema 3.3.31), provar que $P\emptyset = \emptyset$. Entretanto, por teorema 3.3.32 (i), $P\emptyset = Q$, mas $Q = \emptyset$. Logo, temos o resultado esperado.

□

O teorema acima, tal como está apresentado, foi demonstrado originalmente por Lemmon no artigo *Algebraic Semantics for Modal Logic I* (ver (ALGEBRAIC…, 1966) p. 59). É interessante notar que no artigo *An extension Algebras and the Modal System T* (LEMMON, 1960) Lemmon não chega a fazer o teorema de representação para T parando no teorema que mostra a obtenção de matrizes características para o referido sistema. Podemos então mostrar o teorema da representação.

**Teorema 3.35.** *Toda álgebra deôntica (epistêmica, normal, etc.) finita é isomórfica à álgebra de algum e.m. deôntica (epistêmica, normal, etc.) finita.*

*Proof.* Empregaremos a mesma terminologia e definições que foram usadas no teorema 3.3.33. A prova do isomorfismo é como a prova anterior. Resta, então, mostrar que $\mathfrak{R}$ é um e.m. deôntica (epistêmica, etc.). Primeiro suponha que $\mathfrak{M}$ é uma álgebra deôntica. Dado que $P1 = 1$, pelo isomorfismo $\varphi P^*K = K$ ou $\{x : \exists y Uxy \vee x \in Q\} = K\}$. A condição $(\delta)$ se segue imediatamente, e $\mathfrak{R}$ é portanto um e.m. deôntica. Segundo, suponha que $\mathfrak{M}$ é uma álgebra epistêmica. Como para $x \in M, x \leq Px$, pelo isomorfismo $\varphi$, para todo $A \subseteq A, A \subseteq P^*A$. Portanto, em particular para $x \in K, \{x\} \subseteq P^*\{x\}$, daí $x \in P^*\{x\}$. Temos então que $\exists y(y \in \{x\} \wedge Uxy) \vee x \in Q$, e $(\varepsilon)$ segue-se imediatamente resultando no fato de que $\mathfrak{R}$ é um e.m. epistêmica. Terceiro: suponha $\mathfrak{M}$ uma álgebra normal. Daí $P0 = 0$ e pelo isomorfismo $\varphi(P^*\emptyset) = \emptyset$. Por definição $Q = \varphi(P0) = P^*(\varphi(0)) = P^*\emptyset$, logo $Q = \emptyset$ e $\mathfrak{R}$ é um e.m. normal.

□

**Teorema 3.36.** $\vdash_{C2(D2,etc.)} A$

*(i) sse A é satisfeita por $\mathfrak{R}^+$ para toda e.m. $\mathfrak{R}$ (e.m. dôntica, etc.).*

*(ii) sse A é satisfeita por toda e.m. (e.m. deôntica, etc.) $\mathfrak{R}$ finita.*

*Proof.* Se $\vdash_{C2} A$, então $A$ é satisfeita por todas as álgebras modais (teorema 3.3.24), e portanto por $\mathfrak{R}^+$ para todas e.m. $\mathfrak{R}$ (teorema 3.3.31). Reciprocamente, se $A$ é um não-teorema de C2, então existem álgebras modais finitas falsifica quando esta fórmula (teorema 3.3.26), e daí $A$ é falsificada por $\mathfrak{R}^+$ para algum e.m. finita $\mathfrak{R}$ (teorema 3.3.33). Os outros casos são provados com emprego dos teoremas 3.3.34 e 3.3.35.

□

Falta-nos agora um resultado que mostre a equivalência desta completude para com a completude semântica (ao modo de Kripke). Conseguiremos por conseqüência direta do fato de que satisfatibilidade por $\mathfrak{R}^+$ para um e.m. $\mathfrak{R}$ é equivalente à validade em $\mathfrak{R}$ (no sentido kripkeano).

Em primeiro lugar, precisaremos de noções semânticas adequadas.

**Definição 3.37.** *Um* modelo *para uma fbf A em um e.m.* $\langle K, Q, U\rangle$ *é uma função binária* $\Phi(v,k)$*, onde v corresponde às variáveis proposicionais de A e K aos elementos de K, cujo os valores se encontram no conjunto* $\{T, F\}$.

A função definida acima consiste de uma valoração para cada variável proposicional de $A$ em cada mundo de $K$. Assim, nesta função $\Phi$ cada variável está associada a um conjunto de mundos de $K$. Este conjunto indica quais os mundos onde a variável em questão possui valor T. Da mesma forma, cada mundo está associado a um conjunto de variáveis a saber: as variáveis que são verdadeiras neste mundo.

**Definição 3.38.** *Uma extensão única de* $\Phi$*,* $\Phi'(B,k)$ *(onde B é uma subfórmula de A) é uma função definida como se segue:*

*(i) Se B é atômica (isto é, uma variável),* $\Phi'(B,k) = \Phi(B,k)$
*(ii)* $\Phi'(\neg C,k) = T$ *sse* $\Phi'(C,k) = F$
*(iii)* $\Phi'(C \to D,k) = T$ *sse* $\Phi'(C,k) = F$ *e/ou* $\Phi'(D,k) = T$
*(iv)* $\Phi'(\Box C,k) = T$ *sse* $\Phi'(C,l) = T$ *para todos* $l \in K$ *tal que* $Ukl$ *e/ou* $k \notin Q$.

Como conseqüência desta definição, junto dom D1, D2 e D4, temos:

(v) $\Phi'(C \vee D, K) = T$ sse $\Phi'(C,l) = T$ para algum $l \in K$ e/ou $\Phi'(D,k) = T$
(vi) $\Phi'(C \wedge D,k) = T$ sse $\Phi'(C,k) = T$ e $\Phi'(D,k) = T$
(vii) $\Phi'(\Diamond C,k) = T$ sse $\Phi'(C,l)$ para algum $l \in K$ tal que $Ukl$ e/ou $k \in Q$

**Definição 3.39.** *Dizemos que A é verdadeira em um modelo* $\Phi(v,k)$ *para* $l \in K$ *em um modelo* $\langle K, Q, U\rangle$ *sse* $\Phi'(A,l) = T$.

**Definição 3.40.** *Dizemos que A é válida em* $\langle K,Q,U\rangle$ *sse A é verdadeira em todos modelos* $\Phi(v,k)$ *para todos* $l \in K$ *em* $\langle K,Q,U\rangle$.

**Definição 3.41.** *Dizemos que A é válida sse A é válida em todas e.m..*

**Definição 3.42.** *Dizemos que A é D2- (E2, T(C)-, T(D)-, T-) válida sse A é válida em todas e.m. deônticas (epistêmicas, normal, normal deônticas, normal epistêmicas).*

Dada uma fbf $A$ qualquer e um modelo $\Phi(v,k)$ para $A$ em um e.m. $\mathfrak{R} = \langle K,Q,U\rangle$, podemos definir em termos de $\Phi$ uma valoração $\psi(\Phi)$ para as variáveis $v_1,...,v_n$ de $A$ a partir de $\mathfrak{R}^+$ pela seguintes definições: $V(v_i) = \{x : x \in K \wedge \Phi(v_i,x) = T\}(1 \leq i \leq n)$, e $\psi(\Phi) = \langle V(v_i),...,V(v_n)\rangle$. Reciprocamente, dada uma valoração $\psi = \langle A_1,...,A_n\rangle(A_i \subseteq K)$ a partir de $\mathfrak{R}^+$ para as $n$ variáveis de $A$, podemos então definir um modelo $\Phi(\psi)(v,k)$?para $A$ em $\mathfrak{R}$, tomando $\phi(\psi)(v_i,x) = T$ sse $x \in A_i$. Para qualquer valoração $\psi$ de $\mathfrak{R}^+$ para as variáveis de $A$, e subfórmulas $B$ de $A$, seja $V_\Psi(B)$ o valor associado para $B$ em $\mathfrak{R}^+$ para a valoração $\psi$.

**Lema 3.43.** *(i) Seja A uma fbf e* $\Phi(v,k)$ *um modelo para A em* $\mathfrak{R} = \langle K,Q,U\rangle$. *Então para todo* $x \in K\Phi'(A,x) = T$ *sse* $x \in V_{\psi(\Phi)}(A)$.

*(ii) Seja A uma fbf e* $\psi$ *uma valoração para as variáveis de A a partir em* $\mathfrak{R}^+$ *para algum* $\mathfrak{R} = \langle K,Q,U\rangle$. *Então para todo* $x \in K\Phi(\psi)'(A,x) = T$ *sse* $x \in V_\psi(A)$.

*Proof.* (i) Por indução no comprimento de $A$. Se $A$ é uma das variáveis $v_1,...,v_n$ o resultado vale por definição de $\psi(\Phi)$. Para o passo indutivo, suponha que o resultado vale para B e C. Primeiro notamos que pelos quantificadores lógicos:

$\forall y(Uxy \to \Phi'(B,y) = T) \leftrightarrow \forall y(Uxy \to y \in V_{\psi(\Phi)}(B))$

Agora suponha que $A$ tem a forma $B \to C$. Então para todo $x \in K$:

$\Phi'(B \to C,x) = T \leftrightarrow \Phi'(B,x) = F \vee \Phi'(C,x) = T$

$\leftrightarrow x \notin V_{\psi(\Phi)}(B) \vee x \in V_\psi(\Phi)(C)$

$\leftrightarrow x \in (-V_{\psi(\Phi)}(B) \cup V_{\psi(\Phi)}(C))$

$\leftrightarrow x \in V_{\psi(\Phi)}(B \rightarrow C)$

Uma prova similar é obtida se $A$ tem a forma $\neg B$. Suponha finalmente que $A$ tem a forma $\Box B$. Então, para todo $x \in K$:

$\Phi'(\Box B, x) = T \leftrightarrow \forall y(Uxy \rightarrow \Phi'(B, y) = T \wedge x \notin Q$

$\leftrightarrow \forall y(Uxy \rightarrow y \in V_{\psi(\Phi)}(B)) \wedge x \notin Q$ (por (1))

$\leftrightarrow x \in NV_{\psi(\Phi)}(B)$

$\leftrightarrow x \in V_{\psi(\Phi)}(\Box B)$.

A prova de (ii) é similar: notemos que o resultado vale para o caso onde $A$ é uma das variáveis $v_1, ..., v_n$ pela definição de $\Phi(\psi)$.

$\Box$

O principal teorema acerca da aproximação entre álgebra e semântica pode agora ser enunciado:

**Teorema 3.44.** *Seja $\mathfrak{R} = \langle K, Q, U \rangle$ um e.m., e A uma fbf qualquer. Então A é satisfeita por $\mathfrak{R}^+$ sse A é válida em $\mathfrak{R}$.*

*Proof.* Seja $A$ uma fbf satisfeita por $\mathfrak{R}^+$, e considere um modelo $\Phi(v, k)$ para $A$ em $\mathfrak{R}$. Então $V_{\psi(\Phi)}(A) = K$, daí pelo lema (i) $\Phi'(A, x) = T$ para todo $x \in K$. Assim $A$ é válida em $\mathfrak{R}$. Reciprocamente, suponha que $A$ seja válida em $\mathfrak{R}$ e considere uma valoração $\psi$ para suas variáveis. Então, para todo $x \in K$, $\Phi(\psi)'(A, x) = T$, daí pelo lema (ii) para todo $x \in Kx \in V_{\psi}(A)$, portanto $V_{\psi}(A) = K$ e $A$ é satisfeita por $\mathfrak{R}^+$.

$\Box$

**Corolário 3.45.** $\vdash_{C2(D2,E2,etc.)}$ *A sse A é válida (D2-válida, E2-válida, etc.).*

*Proof.* Usando-se o teorema 3.3.36 (i), o teorema 3.3.44 e as definições de validade obtemos o resultado de maneira direta. $\Box$

## Conclusão

Para que os resultados acima fossem obtidos, o presente artigo apresentou e seguiu a metodologia aplicada por Lemmon (ALGEBRAIC. . . , 1966) a saber:

- **1º:** Estabelecer a correlação entre matrizes regulares para cada sistema e um certo tipo de álgebra
- **2º:** Usando a matriz de Lindenbaum, provar que cada sistema tem a propriedade do modelo finito.
- **3º:** Estabelecer os teoremas de representação para essas álgebras em termos de uma álgebra baseada em um conjunto de todos subconjuntos de um certo conjunto.

Além disso, é interessante indicar qual é o ponto de vista filosófico que pode ser desenvolvido sobre os resultados apresentados. O desenvolvimento da lógica modal não é menos interessante para a filosofia, mesmo se a semântica algébrica para a lógica modal tivessem sido inteiramente desenvolvida antes da semântica de Kripke. Todavia, provavelmente o desenvolvimento da lógica modal seria menos atratativo para os filósofos. Contudo, isso não implica que a lógica modal seria menos "filosófica".

Dentre as questões que vieram a motivar o presente trabalho, podemos destacar as seguinte:

- A semântica algébrica para a lógica modal é tão apropriada quanto a semântica dos mundos possíveis?
- Os filósofos contemporâneos teriam o mesmo interesse pela lógica modal se esta tivesse sido constituída como um sistema formal no qual a única semântica conhecida fosse esta que é construída a partir de uma classe de álgebras?
- A lógica modal teria se tornado uma área menor da matemática se sua semântica mais importante fosse algébrica?

A primeira questão foi respondida positivamente neste artigo. Dessa forma restam as duas outras questões. Essas são de um outro tipo, uma vez que sugerem uma especulação contrafactual sobre a semântica da lógica modal e não um resultado técnico verificável formalmente. É muito difícil saber quais seriam as posições detalhadas dos filósofos sobre a lógica modal caso a semântica dos mundos possíveis não tivesse sido proposta e verificada completa para os sistemas modais normais. Todavia, muito provavelmente, os filósofos da segunda metáde do século XX e início do século XXI teríam tido uma certa tendência para evitar argumentos baseados e/ou formalizados nesses sistemas se a única maneira de se atribuir significados a eles fosse a partir de certas classes de álgebras. A expressão "mundos possíveis", por si só, já possui um conteúdo filosófico notável. E anular a importância dessa semântica não é o objetivo de um resultado que tente mostrar a equivalência dessa semântica com a semântica algébrica.

## Referências

ALGEBRAIC Semantics for Modal Logic I and II. *TheJournal of Symbolic Logic*, v. 31, n. 2, p. 46–65 and 191–218, 1966.

BOOLE, G. *An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. [S.l.]: Macmillan, 1954.

BRANQUINHO, D. M. . N. G. G. J. *Enciclopédia de Termos Lógico-filosóficos*. São paulo: Martins Fontes, 2006.

BULL, R.; SEGERBERG, K. Basic modal logic. In: GABBAY, D.; GUENTHNER, F. (Ed.). *Handbook of Philosophical Logic*. [S.l.]: Springer, Dordrecht, 1984. p. 1–88.

CHURCH, A. *Introduction to mathematical Logic*. New Jersey: Princeton University Press, 1956.

FREGE, G. Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, p. 25–50, 1892.

GOLDBLATT, R. Metamathematics of modal logic. *Reports on Mathematical Logic*, v. 6, p. 41–77, 1976.

GOLDBLATT, R. *Mathematical modal logic: a view of its evolution*. 2000. Disponível em: <citeseer.ist.psu.edu/goldblatt01mathematical.html>.

HALMOS, P. *Algebraic Logic*. New York: Chelsea, 1955. v. 12. (Compositio Mathematica, v. 12).

HUNTER, G. *Metalogic, An Introduction to the Metatheory of Standard First Order Logic*. Berkley and Los Angeles: University of California Press, 1973.

JóNSSON, E.; TARSKI, A. Boolean algebras with operators. *American Journal of Mathematics*, v. 74, p. 891–939, 1951.

KEISLER, C. C. C. . H. J. *Model theory*. Amsterdam: North-Holland, 1992. v. 73. (Estudies in Logic and the fundations of matheamatics, v. 73).

KRIPKE, S. A completeness theorem in modal logic. *The Journal of Symbolic Logic*, v. 24, p. 1–14, 1959.

KRIPKE, S. Semantic analysis of modal logic i. normal modal propositional calculi. *Zeitschrift f?ur Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, v. 9, p. 67–93, 1963.

LEMMON, E. J. An extension algebras and the modal system t. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 1, n. 1, p. 3–12, 1960.

LEMMON, E. J.; SCOTT, D.; SEGERBERG, K. *The 'Lemmon notes' : an introduction to modal logic*. [S.l.]: Blackwell, 1977.

MCKINSEY, J. C. C. A solution of the decision problem for the lewis systems s2 and s4 with an application to topology. *Journal of Symbolic Logic*, v. 6, n. 4, p. 117–134, 1941.

MCKINSEY, J. C. C. A solution of the decision problem for the lewis systems s2 and s4, with an application to topology. *Journal of Symbolic Logic*, v. 6, n. 4, p. 117–134, 1941.

MENDELSON, E. *Introduction to Mathematical Logic*. London, Weinheim, New York, Tokio, Melburn, Madras: Chapman & Hall, 1997.

QUINE, W. V. O. *From a Logical Point of View*. [S.l.]: Harvard University Press, Cambridge, 1953.

READ, S. Hugh maccoll and the algebra of strict implication. *Nordic Journal of Philosophical Logic*, v. 3, n. 1, p. 59–83, 1998.

ROSENBLOOM, P. *The Elements of Mathematical Logic*. New York: Dover Publications, Inc., 1950.

SANKAPPANAVAR, S. N. B. . H. P. *A Course in Universal Algebra (millennium edition)*. Disponível para Download em http://onlinebooks.library.upenn.edu/webbin/book: [s.n.], 1981.

SCHOTCH, R. E. J. . P. K. Some remarks on (weakly) weak modal logics. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 22, n. 4, p. 309–314, 1981.

SHOENFIELD, J. R. *Mathematical Logic*. Massachusetts: Addison-Wesley, 1973.

TARSKI, J. C. C. M. . A. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting. *jsl*, v. 13, n. 1, p. 1–15, 1948.

TARSKI, J. C. C. M. . A. Some theorems about the sentential calculi of lewis and heyting. *The Journal of Symbolic Logic*, v. 13, n. 3, p. 171–172, 1948.

VENEMA, M. G. . Y. Algebraic tools for modal logic. *ESSLLI 01*, 2001.